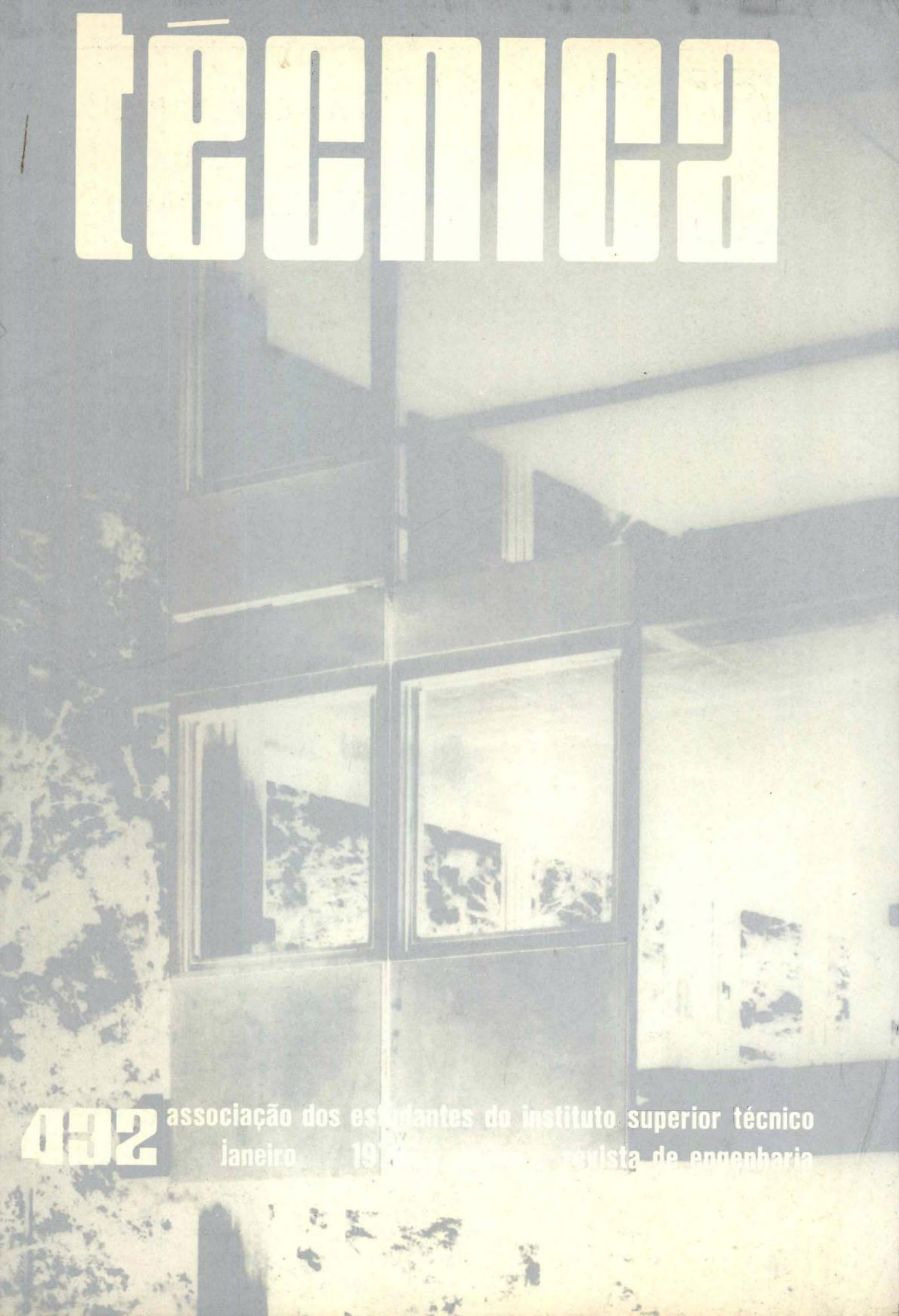
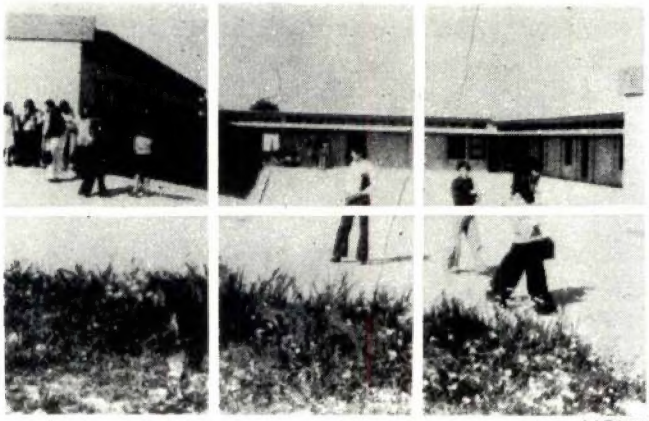
técnica



482 associação dos estudantes do instituto superior técnico
janeiro 19 revista de engenharia

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão



MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda, Moita, Luanda e Lourenço Marques
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. - Lisboa 5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 - Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

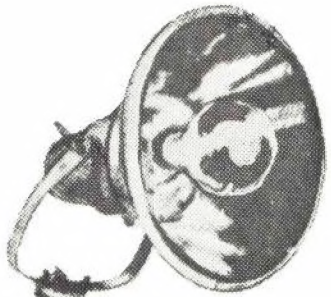
por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

Preço 250$00
Desconto de 10% aos assinantes

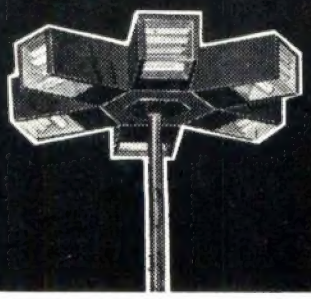
PEDIDOS À

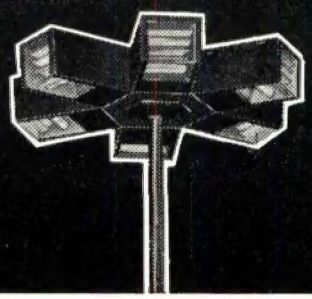
técnica



PROJECTOR RC

Iluminação
é o nosso ofício





SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide — Tel. 219 00 37

técnica

NÚMERO 432 JANEIRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
Delmar Baptista

COLABORADORES
António Maria da Fonseca
José Agostinho Marques
Jorge Braz
Armando Ruano
Manuel M. S. Anastácio
José Luís S. V. Azevedo

DIRECÇÃO REDACÇÃO
E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	140$00	250$.
Países de língua Portuguesa e Espanha	150$00	270$.
Estrangeiro	—	300$.
Número avulso ...	—	35$.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
MOVIGRÁFICA
Rua do Espírito Santo, 19-A - Odivelas

SUMÁRIO

139 — E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA — Convergence of finite element solutions in viscous flow problems.

Convergência do método dos elementos finitos aplicado aos escoamentos viscosos.

(Publicado pela primeira vez no «International Journal for Numerical Methods in Engineering», Vol. 9, 739 — 763, 1975).

First published in the «International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 739 — 763, 1975.

155 — J. S. BRAZÃO FARINHA — *Cálculo de estruturas reticuladas no espaço.*

Analysis of space frames.

167 — ANTÓNIO BETÂMIO DE ALMEIDA — *Limite superior do número de Froude em canais prismáticos e escoamento uniforme.*

Froude number upper bound in prismatic channels and uniform flow.

173 — DO CONHECIMENTO E DA ACÇÃO — *Comentário.*

About knowladge and action — Commentary.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Construções Schréder	2.ª da capa
EFACEC	V
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	IV
Fanafel	IV
Ferrunil	II
MAGUE	III
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Sociedade Portuguesa Cavan	II
S. K. F., Lda.	I
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sopecate	VI

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

TÉC

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

FERRUNIL
CONSTRUÇÕES METÁLICAS INDUSTRIAIS, LDA

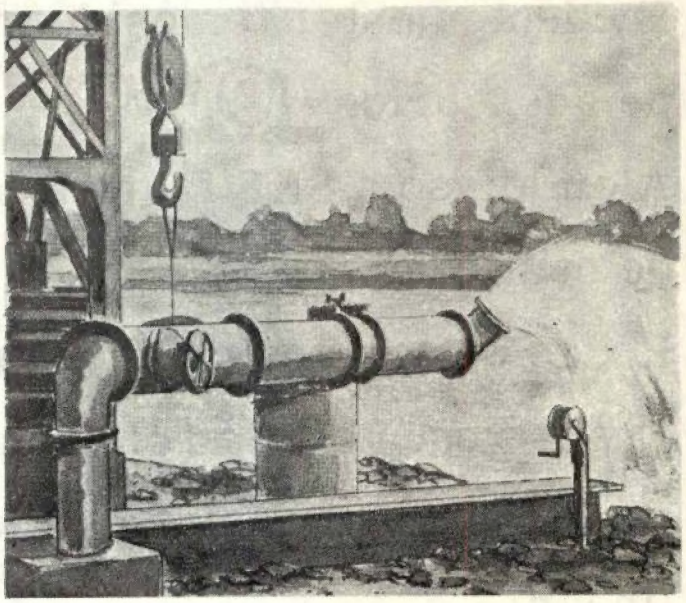
ESTRUTURAS - RESERVATÓRIOS
VIGAMENTOS - SILOS
PONTES ROLANTES
EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

COBERTURAS PARA:
ARMAZÉNS
UNIDADES INDUSTRIAIS
HANGARES
PAVILHÕES DESPORTIVOS, ETC.

FÁBRICA:
Trajouce 244 0230
244 0256

ESCRITÓRIOS:
Av. Elias Garcia, 162, 2º E(L1) ☎77 77 96
☎77 77 97
☎77 75 29
LISBOA ☎77 26 35

Água: eis o que lhe oferecemos!



- Pesquisas e captações de água
- Estudos hidrogeológicos
- Sondagens e Fundações
- Rebaixamento de níveis aquíferos

ACAVACO

R. Rodrigo da Fonseca, 62, r. c-Esq. - Lisboa-1
Tel. 56 11 71/2/3/4

técnica

NÚMERO 432 JANEIRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 532.516:518

Convergence of finite element solutions in viscous flow problems (1) *

Convergência do método dos elementos finitos aplicado aos escoamentos viscosos

E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA (2)
Departament of Civil Engineering,
Technical University of Lisbon,
Lisbon, Portugal

RESUMO

Resumem-se primeiramente os resultados de uma teoria dos métodos variacionais cuja utilização permite a análise da convergência do método dos elementos finitos aplicado ao escoamento de um fluido viscoso regido pelas equações de Navier-Stokes. O método empregado requer a decomposição do fluído em dois corpos mais simples: um fluído viscoso sem inércia e um fluído com inércia mas sem viscosidade. Apresenta-se para este último um novo princípio de mínimo.

ABSTRACT

Results of a theory of variational problems are first summarized. The theory is then applied to the analisys of convergence of the finite element method applied to the flow of a viscous fluid governed by Navier-Stokes equations. The approach requires the decomposition of the body into two simpler ones: a viscous non-inertial fluid and an inertial non-viscous one, the mechanical behaviour of which is governed by minimum principles. A new minimum principle is presented for the inertial non-viscous fluid.

INTRODUCTION

The problem of the convergence of finite element approximations has been considered by the author in several papers, e.g. Reference 1, connected with structural analysis.

In a more recent paper,[2] a theory of variational methods is presented, general enough to cover any non-linear, non-structural cases for which a minimum principle is known to exist.

It will be shown along the present paper how such theory can be applied to the discussion of the convergence of finite element approximations in viscous flow problems governed by Navier-Stokes equation.

The trouble with Navier-Stokes equation is that it cannot be associated with a variational principle involving only the velocities, although a variational principle can be found for the system formed by Navier-Stokes equation and its adjoint equation.[3] Such a principle cannot be of much help for proving convergence,

(1) The research reported in this paper was supported by Instituto de Alta Cultura, Lisboa (Projecto TLE/4).
(2) Professor.
(*) (Publicado pela primeira vez no «International Journal for Numerical Methods in Engineering», Vol. 9, 739 — 763, 1975).
(*) First Published in the «International Journal for Numerical Methods in Engineering», Vol. 9, 739 — 763, 1975).

however, because it is not a minimum principle as our theory requires.

Fortunately, however, the theory can still be applied to complex models not governed by global minimum principles if such models can be shown to result from the combination of simpler models each of which is indeed governed by a minimum principle.[2]

This is precisely what happens with a fluid flowing in accordance with Navier-Stokes equation, as we can consider it as resulting from the association in parallel of two simpler bodies: one with viscosity and no mass (viscous non-inertial flow), the other with mass but no viscosity (inertial non-viscous flow). Such association is schematically represented in Figure 1.

The minimum principles of the theory of viscosity permits discussion of convergence in the first case. A principle closely connected to Hamilton's principle of Mechanics permits discussion of convergence in the second case.

The main results of the theory will be summarized in the next section. Its results will be applied to the viscous non-inertial flow case in the section 'Viscous non-inertial flow' and to the inertial non-viscous flow case in the section 'Inertial non-viscous flow'. A theoretical investigation of how the results obtained in the sections 'Viscous non-inertial flow' and 'Inertial non--viscous flow' can be used for the discussion of convergence in the general case of the inertial viscous flow will finally be presented in the section Viscous inertial flow'.

RESULTS OF THE THEORY OF VARIATIONAL METHODS

Let X be a Banach space and let φ be a continuous functional on X which is assumed to be minimized on a given subset $C \subset X$ by an element $s \in C$.

Our basic variational problem consists in the determination of such a minimizer, s, which is called the exact solution.

s is assumed to be a critical point of φ on C. The first and second Fréchet derivatives of φ are supposed to exist at s and the second derivative of φ to be a positive definite operator.

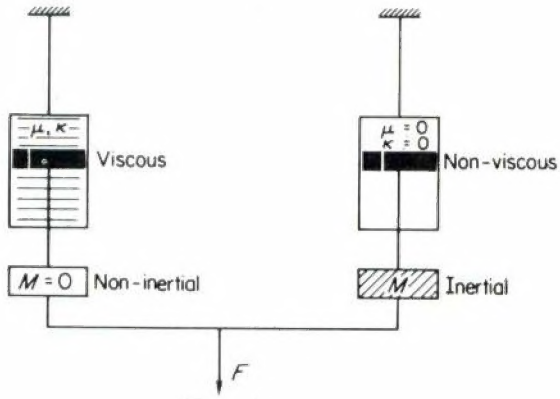


Figure 1

A projection operator B, which may be called an inter polation operator, is considered which makes any element $x \in X$ correspond to a certain element x' of a subspace $X' \subset X$.

Let $C' \subset X'$ be the set of all the B-images of the elements of C. It is assumed that an element $s'_a \in C'$ exists which minimizes φ on C'. s'_a is called the approximate solution.

The approximation theorem[2] states that a metric can be introduced in X such that, if infinitesimals of higher order are neglected,

$$d(s, s'_a) \leqslant d(s_a, s'_a) + \sqrt{(|\delta_s\varphi| + |\delta_a\varphi|)} \tag{1}$$

where s_a is any element of C such that

$$s'_a = B(s_a) \tag{2}$$

and

$$\delta_s\varphi = \varphi(s) - \varphi(s') \tag{3}$$

$$\delta_a\varphi = \varphi(s_a) - \varphi(s'_a) \tag{4}$$

C' does not generally belong to C. If it does, as in the case of Ritz's method, operator B is called conforming.

In the conforming case, s_a can be chosen to coincide with s'_a and inequality (1) becomes simply

$$d^2(s, s'_a) \leqslant |\delta_s\varphi| \tag{5}$$

Now, it can be shcwn[2] that, as $s' \in C$.

$$\delta_s\varphi = d^2(s, s'), \tag{6}$$

if infinitesimals of higher order are neglected, so that (5) yields

$$d(s, s'_a) \leqslant d(s, s') \tag{7}$$

Inequality (7) means that, in Ritz's method, the approximation error is bounded by the interpolation error.

In the more general case of the finite element method, C' is not a subset of C, so that the use of inequality (1) is required in the discussion of convergence.

VISCOUS NON-INERTIAL FLOW

The equations of the linear theory of viscosity may be obtained from those of the linear theory of elasticity just by replacing strains and displacements by rates of strain and velocities. We have then

$$\sigma^{\mathrm{T}}_{ij,i} - p_j + \rho\bar{f}_j = 0 \tag{8}$$

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{T}}_{ij} + \tfrac{1}{3}\dot{\varepsilon}\delta_{ij} = \tfrac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{9}$$

$$\sigma^{\mathrm{T}}_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}^{\mathrm{T}}_{ij} \tag{10}$$

$$p = -\kappa\dot{\epsilon} \tag{11}$$

The stress and the strain rate tensors are decomposed into their isotropic and deviatoric terms according to

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{T} - p\,\delta_{ij} \tag{12}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{T} + \tfrac{1}{3}\dot{\epsilon}\delta_{ij} \tag{13}$$

The domain Δ is assumed subdivided into subdomains Δ^e.

The boundary of each subdomain Δ^e is denoted by B^e and the external boundary of Δ by B (subdivided into B_1 and B_2). The internal boundary of Δ is denoted by Γ.

The boundary conditions on B are

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{T} n_i - p n_j = \bar{\sigma}_j \quad \text{on} \quad B_1 \tag{14}$$

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{on} \quad B_2 \tag{15}$$

where σ_j denotes the component j of the traction vector.

On the internal boundary we assume

$$\sigma_i^{+} + \sigma_i^{-} = 0 \tag{16}$$

$$v_i^{+} = v_i^{-} \tag{17}$$

where indices + and − denote each side of the internal boundary. The first equation means that no external forces are distributed on Γ and the second that the velocities are continuous across the subdomain boundaries.

A pair of stress and strain rate fields connected by the stress-strain rate equations (10) and (11) will be called a viscous field (or simply a field along the present section).

A velocity field connected with the strain-rate field through the strain rate- velocity equations can of course be associated to each viscous field. Such a velocity field, however, presents 6 degrees-of-freedom wich can be eliminated only if adequate velocity boundary conditions are given on B_2.

The elements of space X are in the present case all the viscous fields on Δ. The norm of an arbitrary element $x \in X$ is given by

$$\|x\| = \left(\sum_e \int_{\Delta^e} \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}\Delta^e\right) = \sqrt{\left(\sum_e \int_{\Delta^e} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{T}\dot{\varepsilon}_{ij}^{T} + \dot{\epsilon}^2)\,\mathrm{d}\Delta^e\right)} \tag{18}$$

Two minimum theorems appear in the theory of viscosity which correspond to the minimum total potential and total complementary theorems of the theory of elasticity.[1]

The complementary energy approach will not be considered in the present paper. The functional φ is therefore the functional involved in the first theorem, i.e, the total energy dissipation rate

$$\varphi = \sum_e \left[\tfrac{1}{2}\int_{\Delta^e} (\sigma_{ij}^{T}\dot{\varepsilon}_{ij}^{T} - p\dot{\epsilon})\,\mathrm{d}\Delta^e - \int_{\Delta^e} \rho \bar{f}_i v_i\,\mathrm{d}\Delta^e - \int_{B^e \cap B_1} \bar{\sigma}_i v_i\,\mathrm{d}B^e\right] \tag{19}$$

The variational principle is an Eulerian one, i.e., the exact solution makes the first Eulerian variation of φ equal to zero on the set of all the viscous fields which satisfy equations (9), (15) and (17).

The subset $C \subset X$ is thus the set of all such fields.

Let us consider now a decomposition into finite elements corresponding to the subdivision into subdomains and let a set of points on the internal boundary be selected as nodes.

Let the elements of X' be fields which satisfy equations

$$v_i = \psi_N^e v_{iN} \tag{20}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \chi_{ijkN}^e v_{kN} \tag{21}$$

within subdomain Δ^e.

Index N denotes a general node of the system and v_{iN} the nodal values of functions v_i.

The elements of C' are the elements of X' which satisfy the boundary condition

$$v_{iN} = \bar{v}_i(N) \tag{22}$$

for nodes located on B_2.

The discrete equation which represents the conditions for φ being stationary on C' is

$$m_{ijMN} v_{iM} = f_{jN} \tag{23}$$

where

$$m_{ijMN} = \sum_e \int_{\Delta^e} [2\mu\chi_{rsiM}^e\chi_{rsjN}^e - (\tfrac{2}{3}\mu + \kappa)\chi_{rriM}^e\chi_{ssjN}^e]\,\mathrm{d}\Delta^e \tag{24}$$

$$f_{jN} = \sum_e \left[\int_{\Delta^e} \psi_N^e \rho \bar{f}_j\,\mathrm{d}\Delta^e + \int_{B^e \cap B_1} \psi_N^e \bar{\sigma}_j\,\mathrm{d}B^e\right] \tag{25}$$

Considering the results obtained for the elastic case in a previous paper,[2] it is easy to conclude that, if χ is an arbitrary element of X, χ' is the B-projection of χ in X' and l is the largest diameter in the whole set of subdomains Δ^e, the variation of φ from χ to χ', i.e.,

$$\delta\varphi = \varphi(x') - \varphi(x) \tag{26}$$

is of the order of l^{n+1} if

(i) n is the degree of the highest degree complete polynomial with arbitrary coefficients contained in any of the expressions of the right-hand sides of (20) and (21).

(ii) all the derivatives of the velocities and strain rates associated with χ, with order $n + 1$ or less, are bounded within each subdomain Δ^e.

The distance $d(s, s'_a)$ between the exact and the approximate solution is of the order of $l^{(n+1)/2}$ if condition (i) is satisfied and condition (ii) is also satisfied both by the exact and approximate solutions* (whatever the value of l).

In case of conformity, (5) holds true and, therefore, $d(s_a, s'_a)$ is of the order of $l^{(n+1)/2}$ whenever condition (i) is satisfied and condition (ii) is also satisfied by the exact solution s.

INERTIAL NON-VISCOUS FLOW

Equations

In absence of viscosity, the stress tensor σ_{ij} is isotropic, i.e.,

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} \tag{27}$$

where p is the pressure.

The equilibrium equations become therefore

$$\rho\dot{v}_i + p_{,i} = \rho\bar{f}_i \tag{28}$$

where $\bar{f}_i$ denotes the body force density.

These 3 equations involve 5 unknowns: the three velocities, the pressure and the density ρ.

The two equations which are missing are the continuity equation (density-velocity equation) and the equation of state (pressure-density equation).

The continuity equation can be derived from the condition

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\mathrm{d}\Delta) = 0 \tag{29}$$

which expresses the invariance of mass.

As

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\Delta) = \frac{(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}\Delta)}{\mathrm{d}\Delta}\mathrm{d}\Delta = \mathrm{div}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Delta = \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Delta. \tag{30}$$

(29) yields

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Delta + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Delta = 0 \tag{31}$$

and, therefore,

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{32}$$

which is the Eulerian form of the continuity equation. Another form of (32) is

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\mathbf{v} = 0 \tag{33}$$

Let us consider now the equation of state.

We start by assuming that no mechanical energy is dissipated into heat, and writing that the variation of the internal energy contained within an element of mass dm is equal to the work done by the external forces, i.e.

$$\delta(e\,\mathrm{d}m) = -p\,\delta(\mathrm{d}\Delta) \tag{34}$$

where e is the internal density.

By virtue of the invariance of mass (continuity), (34) yields

$$\delta e\,\mathrm{d}m = -p\,\delta\left(\frac{\mathrm{d}m}{\rho}\right) = -p\,\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}m \tag{35}$$

and, therefore, the equation of state

$$p = -\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}(1/\rho)} \tag{36a}$$

or[5]

$$p = \rho^2\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho} \tag{36b}$$

Density e is admitted to be such a function of ρ such that the continuity of p implies the continuity of ρ.

If the domain Δ is decomposed into subdomains Δ^e, the exact solution is supposed to satisfy the equations (28), (32) and (36a) within each subdomain Δ^e, the external boundary conditions

$$\frac{p}{\rho} = \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \quad \text{on} \quad B_1 \tag{37}$$

$$v_n = \overline{v_n} \quad \text{on} \quad B_2 \tag{38}$$

and the conditions

$$p^+ = p^- \tag{39a}$$

$$v_n^+ = v_n^- \tag{40}$$

on Γ.

As the continuity of p implies the continuity of ρ, equation (39a) implies

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)^+ = \left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{39b}$$

which is analogous to (37).

v_n denotes the normal component of the velocity at a given point of the boundary. Equation (40) supposes that the positive sense of the unit normal vector at each point on Γ is defined (from $-$ to $+$, for instance).

A set of a velocity field, a pressure field and a density field will be called an inertial field (or simply a field, in the present section).

A displacement field with components u_i such that

$$v_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \dot{u}_i \tag{41}$$

* It can be demonstrated that if condition (i) holds and the so-called 'patch test' is passed by the system of elements, condition (ii) will be satisfied by s'_a.

can of course be associated to each inertial field.

An inertial field will be termed continuous if equations (32) and (36) are satisfied within each subdomain Δ^e and equations (38) and (40) are satisfied respectively on B_2 and on Γ.

Variational principle

Different variational principles have been presented by several authors[3/5/6] for the case of non-viscous flow.

Such principles can be classified into Eulerian or Lagrangian, according to which kind of variation of the functional is made equal to zero.

This classification of the principles into Lagrangian and Eulerian cannot depend of course on the functional being expressed in a Lagrangian or Eulerian form because although some expressions are more naturally written in one of these forms than in the other, any expression which is written in Lagrangian form can also be written in Eulerian and *vise versa*.

Now, the problem of integrating equations (28), (32) and (36) over a fixed domain Δ is an Eulerian problem in the sense that it considers at each instant the portion of the fluid actually contained in Δ and does not follow in time the motion of a definite mass.

It seems thus in accordance with the nature of such a problem that the functional to be made stationary has a natural Eulerian expression, involving integrals on Δ of Eulerian functions.

This does not mean, however, that an Eulerian principle, like Lin's principle,[5] has to be used, because, as pointed out above, what makes a principle Eulerian or Lagrangian is the kind of variation which is made equal to zero and not the expression of the functional. In other words, a Lagrangian principle can be associated to a functional whose natural expression is Eulerian.

A Lagrangian principle can will be used therefore which has the advantage over Lin's principle of not involving Lagrangian co-ordinates as constraints.

The functional is

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\,\mathrm{d}t \tag{42}$$

where

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i v_i \,\mathrm{d}\Delta^e \tag{43}$$

$$V = E - \sum_e \int_{\Delta^e} \bar{f}_i x_i \rho \,\mathrm{d}\Delta^e + \int_{B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} x_n \rho \,\mathrm{d}B \tag{44}$$

T is the kinetic energy and V performs the role of the total potential energy, so that the principle is closely connected to the classical Hamilton principle. E is the internal energy. x_n denotes $x_i n_i$

Our variational principle states that the exact solution of equations (28), (32), (36a) and (41) with initial and final conditions

$$u_i(t_1) = \overline{u_i(t_1)} \tag{45}$$

$$u_i(t_2) = \overline{u_i(t_2)} \tag{46}$$

$$\rho(t_1) = \overline{\rho(t_1)} \tag{47}$$

$$\rho(t_2) = \overline{\rho(t_2)} \tag{48}$$

and boundary conditions (37)–(40) makes φ stationary or, more precisely, makes the Lagrangian variation of φ equal to zero on the set of continuous fields on Δ which satisfies (32), (36a), (38), (40), (41) and (45)–(48).

The fact that variation is Lagrangian and continuity is preserved implies

$$\left.\begin{aligned} \delta v_i &= \delta \dot{u}_i \\ \delta(\rho\,\mathrm{d}\Delta^e) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{within } \Delta^e \qquad \begin{aligned}(49)\\(50)\end{aligned}$$

$$\delta v_n = 0 \qquad \text{on } B_2 \tag{51}$$

$$\delta v_n^+ = \delta v_n^- = \delta v_n \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{52}$$

Also, by virtue of (45)–(48),

$$\delta u_i(t_1) = 0 \tag{53}$$

$$\delta u_i(t_2) = 0 \tag{54}$$

$$\delta \rho(t_1) = 0 \tag{55}$$

$$\delta \rho(t_2) = 0 \tag{56}$$

The Lagrangian variation of the kinetic energy is

$$\begin{aligned} \delta T &= \tfrac{1}{2}\sum_e \int_{\Delta^e} \delta(\rho v_i v_i \,\mathrm{d}\Delta^e) = \sum_e \left[\int_{\Delta^e} \tfrac{1}{2} v_i v_i\, \delta(\rho\,\mathrm{d}\Delta^e) + \right. \\ &\left. + \int_{\Delta^e} \tfrac{1}{2}\,\delta(v_i v_i)\rho\,\mathrm{d}\Delta^e\right] = \sum_e \int_{\Delta^e} \tfrac{1}{2}\,\delta(v_i v_i)\rho\,\mathrm{d}\Delta^e = \\ &= \sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i\, \delta v_i \,\mathrm{d}\Delta^e = \sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i\, \delta \dot{u}_i \,\mathrm{d}\Delta^e = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i\, \delta u_i \,\mathrm{d}\Delta^e - \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho v_i \,\mathrm{d}\Delta^e) \end{aligned} \tag{57}$$

By virtue of (29),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho v_i \,\mathrm{d}\Delta^e) = v_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,\mathrm{d}\Delta^e) + \dot{v}_i \rho\,\mathrm{d}\Delta^e = \dot{v}_i \rho\,\mathrm{d}\Delta^e. \tag{58}$$

there results

$$\delta T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i\, \delta u_i \,\mathrm{d}\Delta^e - \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i \dot{v}_i \rho\,\mathrm{d}\Delta^e \tag{59}$$

On the other hand, using (36b), we obtain

$$\delta E^e = \delta \int_{\Delta^e} e\rho \, \mathrm{d}\Delta^e = \int_{\Delta^e} \delta e\rho \, \mathrm{d}\Delta^e + \int_{\Delta^e} e \, \delta(\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) =$$

$$= \int_{\Delta^e} \delta e\rho \, \mathrm{d}\Delta^e = \int_{\Delta^e} \frac{\partial e}{\partial \rho} \delta\rho \, \rho \, \mathrm{d}\Delta^e = \int_{\Delta^e} \frac{p}{\rho} \delta\rho \, \mathrm{d}\Delta^e \quad (60)$$

and, as (32) yields

$$\delta\rho + \rho \operatorname{div} \delta\mathbf{u} = 0, \quad (61)$$

there results

$$\delta \int_{\Delta^e} e\rho \, \mathrm{d}\Delta^e = -\int_{\Delta^e} p \operatorname{div} \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}\Delta^e =$$

$$= -\int_{\Delta^e} \operatorname{div}(p \, \delta\mathbf{u}) \, \mathrm{d}\Delta^e + \int_{\Delta^e} \operatorname{grad} p \, . \, \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}\Delta^e$$

$$= -\int_{B^e} p \, \delta u_n \, \mathrm{d}\Delta^e + \int_{\Delta^e} \operatorname{grad} p \, . \, \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}\Delta^e \quad (62)$$

As, by virtue of (49, (51), (52), and also (45) and (46),

$$\delta u_n = 0 \qquad \text{on} \quad B_2 \quad (63)$$

$$\delta u_n^+ = \delta u_n^- = \delta u_n \quad \text{on} \quad \Gamma \quad (64)$$

we can write

$$\sum_e \int_{B^e} p \, \delta u_n \, \mathrm{d}B^e = \int_\Gamma (p^- - p^+) \, \delta u_n \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{B_1} p \, \delta u_n \, \mathrm{d}B \quad (65)$$

and, therefore,

$$\delta E = \delta \sum_e \int_{\Delta^e} e\rho \, \mathrm{d}\Delta^e = \sum_e \int_{\Delta^e} p_{,i} \, \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e +$$

$$+ \int_\Gamma (p^+ - p^-) \, \delta u_n \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{B_1} p \, \delta u_n \, \mathrm{d}B \quad (66)$$

Considering that $\delta x_i = \delta u_i$

$$\delta \int_{\Delta^e} \bar{f}_i x_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e = \int_{\Delta^e} \bar{f}_i \, \delta u_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e +$$

$$+ \int_{\Delta^e} \bar{f}_i u_i \, \delta(\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) = \int_{\Delta^e} \bar{f}_i \, \delta u_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e \quad (67)$$

$$\delta \int_{B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} x_n \rho \, \mathrm{d}B = \int_{B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \delta u_n \rho \, \mathrm{d}B +$$

$$+ \int_{B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} u_n \, \delta(\rho \, \mathrm{d}B) = \int_{B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \delta u_n \rho \, \mathrm{d}B \quad (68)$$

Introducing (59), (66), (67) and (68) into

$$\delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) \, \mathrm{d}t. \quad (69)$$

we obtain finally

$$\delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i \, \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e \right) - \right.$$

$$- \sum_e \int_{\Delta^e} (\rho \dot{v}_i + p_{,i} - \rho \bar{f}_i) \, \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e$$

$$\left. + \int_{B_1} \left[\frac{p}{\rho} - \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \right] \delta u_n \rho \, \mathrm{d}B_1 - \int_\Gamma [(p^+ - p^-) \, \delta u_n \, \mathrm{d}\Gamma] \right. \mathrm{d}t \quad (70)$$

By virtue of (53) and (54),

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i \, \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\sum_e \int_{\Delta^e} \rho v_i \, \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (71)$$

and thus

$$\delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_e \int_{\Delta^e} (\rho \bar{f}_i - \rho \dot{v}_i - p_{,i}) \, \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e + \right.$$

$$\left. + \int_{B_1} \left[\frac{p}{\rho} - \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \right] \delta u_n \, \mathrm{d}B - \int_\Gamma (p^\pm p^-) \, \delta u_n \, \mathrm{d}\Gamma \right] \mathrm{d}t \quad (72)$$

Equations (28), (37) and (39a) are therefore the necessary and sufficient conditions for functional φ becoming stationary.

In what conditions will the variational principle which has just been introduced be a minimum principle?

A similar discussion has been made for Hamilton's principle (see, for instance Reference 7, pp. 651—667) and could practically be repeated for the present case.

The essential result of this discussion is that the principle is a minimum principle if $t_2 - t_1$ is sufficiently small.

Indeed, we obtain from (72)

$$(\delta^2\varphi)_s = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_e \int_{\Delta^e} - \left[\delta\dot{v}_i \, \delta u_i + \delta\left(\frac{p_{,i}}{\rho}\right) \delta u_i \right] \rho \, \mathrm{d}\Delta^e + \right.$$

$$\left. + \int_{B_1} \delta\left(\frac{p}{\rho}\right) \delta u_n \rho \, \mathrm{d}B - \int_\Gamma (\delta p^+ - \delta p^-) \, \delta u_n \, \mathrm{d}\Gamma \quad \mathrm{d}t \right\} \quad (73)$$

where s denotes the exact solution.

But

$$-\delta\dot{v}_i \, \delta u_i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta v_i \, \delta u_i) + \delta v_i \, \delta v_i \quad (74)$$

and thus, by virtue of (53), (54) and (29),

$$(\delta^2\varphi)_s = \int_{t_1}^{t_2} \sum_e \int_{\Delta^e} \rho\, \delta v_i\, \delta v_i\, \mathrm{d}\Delta^e\, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_e \right.$$

$$= \int_{\Delta^e} \delta\left(\frac{p_{,i}}{\rho}\right) \delta u_i \rho\, \mathrm{d}\Delta^e +$$

$$\left. + \int_{B_1} \delta\left(\frac{p}{\rho}\right) \delta u_n \rho\, \mathrm{d}B - \int_\Gamma (\delta p^+ - \delta p^-)\, \delta u_n\, \mathrm{d}\Gamma \right] \mathrm{d}t \quad (75)$$

Considering (63) and (64), we can write

$$\int_{B_1} \delta\left(\frac{p}{\rho}\right) \delta u_n \rho\, \mathrm{d}B + \int_\Gamma \left[\delta\left(\frac{p}{\rho}\right)^- - \delta\left(\frac{p}{\rho}\right)^+ \right] \delta u_n \rho\, \mathrm{d}\Gamma =$$

$$= \sum_e \int_{\Delta^e} \delta\left(\frac{p}{\rho}\right) \delta u_n \rho\, \mathrm{d}B^e \quad (76)$$

By virtue of (36b) and (61),

$$\rho\, \delta\left(\frac{p}{\rho}\right) = \rho\, \delta\left(\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho}\right) = \rho\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho} + \rho \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}\rho^2}\right) \delta\rho =$$

$$= \rho\left(\frac{p}{\rho^2} + \rho \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}\rho^2}\right) \delta\rho = \left(p + \rho^3 \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}\rho^2}\right) \frac{\delta\rho}{\rho}$$

$$= -\left(p + \rho^3 \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}\rho^2}\right) \operatorname{div} \delta\mathbf{u} = \left(p - \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right) \operatorname{div} \delta\mathbf{u} \quad (77)$$

so that

$$\int_{B^e} \delta\left(\frac{p}{\rho}\right) \delta u_n \rho\, \mathrm{d}B^e = \int_{B^e} \left(p - \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right) \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \delta u_n\, \mathrm{d}B^e \quad (78)$$

On the other hand,

$$\rho\, \delta\left(\frac{p_{,i}}{\rho}\right) = \delta p_{,i} + p_{,i} \operatorname{div} \delta\mathbf{u} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \delta\rho\right)_{,i} + p_{,i} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}$$

$$= -\left(\rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\right)_{,i} + p_{,i} \operatorname{div} \delta\mathbf{u} \quad (79)$$

so th

$$-\int_{\Delta^e} \left(\frac{p_{,i}}{\rho}\right) \delta u_i \rho\, \mathrm{d}\Delta^e = \int_{\Delta^e} \left(\rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\right)_{,i} \delta u_i\, \mathrm{d}\Delta^e -$$

$$- \int_{\Delta^e} p_{,i} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \delta u_i\, \mathrm{d}\Delta^e$$

$$= \int_{\Delta^e} \left(\rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \delta u_i\right)_{,i} \mathrm{d}\Delta^e - \int_{\Delta^e} \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} (\operatorname{div} \delta\mathbf{u})^2\, \mathrm{d}\Delta^e -$$

$$- \int_{\Delta^e} p_{,i} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \delta u_i\, \mathrm{d}\Delta^e$$

$$= \int_{B^e} \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \delta u_n\, \mathrm{d}B^e - \int_{\Delta^e} \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} (\operatorname{div} \delta\mathbf{u})^2\, \mathrm{d}\Delta^e -$$

$$- \int_{\Delta^e} p_{,i} \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \delta u_i\, \mathrm{d}\Delta^e \quad (80)$$

Introducing into (75), there results :

$$(\delta^2\varphi)_s = \int_{t_1}^{t_2} \sum_e \int_{\Delta^e} \rho\, \delta v_i\, \delta v_i\, \mathrm{d}\Delta^e\, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} -$$

$$- \sum_e \left[\int_{\Delta^e} \left(-\operatorname{grad} p \,.\, \delta\mathbf{u} - \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \operatorname{div} \delta\mathbf{u} \right) \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \mathrm{d}\Delta^e \right.$$

$$\left. + \int_{B^e} \left(p\, \delta u_n - \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \delta u_n \right) \operatorname{div} \delta\mathbf{u}\, \mathrm{d}B^e \right] \mathrm{d}t \quad (81)$$

It will be shown now that the first term is of lesser order than the remaining ones so that, as such a first term is always positive, $(\delta^2\varphi)_s$ is also positive if $t_2 - t_1$ is sufficiently small.

Indeed,

$$\delta u_i(t) = \delta u_i(t_1) + (t - t_1)\, \delta \dot{u}_i(t_1) + \frac{(t - t_1)^2}{2!} \delta \ddot{u}_i(t') \quad (82)$$

where $t_1 \leqslant t' \leqslant t$ and thus, by virtue of (49) and (53),

$$\delta u_i(t) = (t - t_1)\, \delta v_i(t_1) + \frac{(t - t_1)^2}{2} \delta \dot{v}_i(t') \quad (83)$$

On the other hand,

$$\delta v_i(t) = \delta v_i(t_1) + (t - t_1)\, \delta \dot{v}_i(t'') \quad (84)$$

where $t_1 \leqslant t'' \leqslant t$.

Multiplying (84) by $(t - t_1)$ and subtracting from

$$\delta u_i(t) = (t - t_1)\, \delta v_i(t) + (t - t_1)^2 [\tfrac{1}{2} \delta \dot{v}_i(t') - \delta \dot{v}_i(t'')] \quad (85)$$

Assuming that the fields of the class on which the functional is made stationary have bounded accelerations, the last term in the right-hand side of (85) is of order higher than the order of the first so that we can write

$$\delta u_i = (t_2 - t_1) O(\delta v_i) \quad (86)$$

Assuming that the unit volume expansion is also bounded for such fields,

$$\delta(\operatorname{div} \mathbf{u}) = O(\delta \|\mathbf{u}\|) \quad (87)$$

and then

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_e \int_{\Delta^e} \delta v_i \, \delta v_i \, \mathrm{d}\Delta^e \geqslant \int_{t_1}^{t_2} \sum_e \left[- \int_{\Delta^e} p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} (\mathrm{div}\, \delta \mathbf{u})^2 \, \mathrm{d}\Delta^e + \int_{B^e} (\mathrm{div}\, \delta \mathbf{u}) \, \delta u_n \, \mathrm{d}B^e \right] \mathrm{d}t \tag{88}$$

It becomes clear that

$$(\delta^2 \varphi)_s > 0 \tag{89}$$

whenever $\|\delta \mathbf{v}\| > 0$ and $(t_2 - t_1)$ is sufficiently small.

Assume now that such a small interval of time increases and reaches a critical value above which $(\delta^2 \varphi)_s$ ceases to be positive.

For this critical value $(\delta^2 \varphi)_s = 0$, which means that several different motions are possible and that the motion becomes unstable.

In other words, if the location of the fluid particles is prescribed for $t = t_1$ and $t = t_2$, the motion is stable if $t_2 - t_1$ is sufficiently small. If $t_2 - t_1$ increases, the motion may become unstable. The important point is that $(\delta \varphi)_s$ can become negative only in case of instability.

It must be added that, although this conclusion seems to be quite reasonable, an investigation on the connection between the sign of $(\delta^2 \varphi)_s$ and instability, in particular cases, is certainly lacking and should be made in the near future.

Discrete equations

Let us consider the body decomposed into Eulerian finite elements corresponding to the subdomains Δ^e.

Although our analysis could be adapted to elements with other shapes, it is assumed in the sequel that such elements are tetrahedral.

Two kinds of nodes are considered: the vertices and points located on the edges of the tetrahedra. The generalized displacements and velocities are ascribed to the vertices. The generalized densities are ascribed both to the vertices and to the mid-edge nodes (Figure 2).

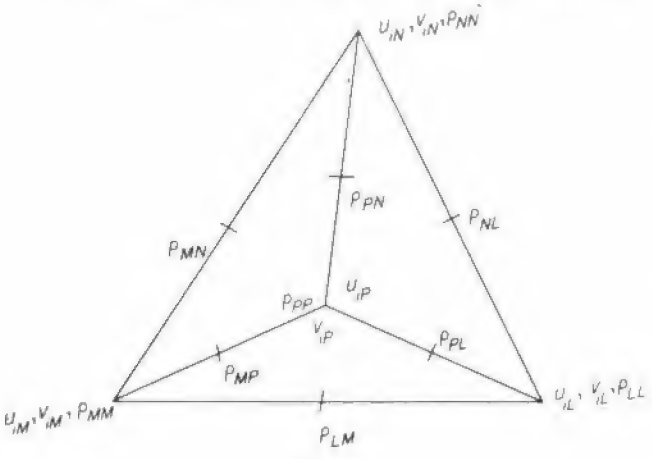


Figure 2

u_{iN}, v_{iN} and ρ_{NN} denote the values of magnitudes u_i, v_i and ρ at node N. ρ_{LM} denotes the value of the density ρ at the mid-edge node located between the vertices L and M.

We assume

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \psi_N^e(\mathbf{x}) v_{iN}(t) \tag{90a}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \varphi_{LM}^e(\mathbf{x}) \rho_{LM}(t) \tag{91}$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \psi_L^e(\mathbf{x}) \psi_M^e(\mathbf{x}) \pi_{LM}^e(t) \tag{92}$$

within Δ^e.

Function $\psi_N^e(\mathbf{x})$ is assumed such that

$$\psi_L^e(\mathbf{x}_M) = \delta_{LM} \tag{93}$$

and

$$x_i = \psi_N^e(\mathbf{x}) x_{iN} \tag{94}$$

As, on the other hand, (41) is supposed to hold,

$$\delta u_i = \psi_N^e \delta u_{iN} \tag{90b}$$

Function $\varphi_{LM}^e(\mathbf{x})$ is such that

$$\varphi_{LM}^e(\mathbf{x}_{RS}) = \delta_{LM,RS} \tag{95}$$

where $\delta_{LM,RS}$ is assumed equal to one if L coincides with R and M with S, and to zero in any other case.

Magnitudes π_{LM}^e are not nodal values of p, ρ, because the product $\psi_L^e \psi_M^e$ does not take values one and zero at the mid-edge nodes.

On the other hand, magnitudes π_{LM}^e are the only nodal magnitudes which are denoted with index e. This is due to the fact that the nodal continuity of u_i, v_i and ρ, and not of p, ρ, is postulated.

The generalized form of the continuity condition (29) is admitted to be

$$\sum_e \int_{\Delta^e} \psi_L^e \psi_M^e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) = 0 \tag{96}$$

Proceeding as in (27), we obtain from (96)

$$\sum_e \int_{\Delta^e} \psi_L^e \psi_M^e \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \, \mathrm{div}\, \mathbf{v} \right) \mathrm{d}\Delta^e = 0 \tag{97}$$

and

$$\sum_e \int_{\Delta^e} \psi_L^e \psi_M^e \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, (\rho \mathbf{v}) \right) \mathrm{d}\Delta^e = 0 \tag{98}$$

Introducing (90a) and (91) into (98) we obtain the discrete or generalized continuity equation

$$a_{LMPQ}\rho_{PQ}+b_{iLMPQN}\rho_{PQ}v_{iN}=0 \tag{99}$$

where

$$a_{LMPQ}=\sum_e\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e \tag{100}$$

$$b_{iLMPQN}=\sum_e\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M(\varphi^e_{PQ}\psi^e_N)_{,i}\,\mathrm{d}\Delta^e \tag{101}$$

We observe that the number of non-trivial independent equations in (99) equals the number of nodal densities ρ_{PQ}, i.e., the total number of vertices and mid-edge nodes in the tetrahedron.

Indeed, as the coefficients a_{LMPQ} and b_{iLMPQN} are symmetric in *P* and *Q*, equation *(99)* does not change if *P* and *Q* are interchanged. On the other hand, all the equations (99) corresponding to two nodes *P* and *Q*, such that no element exists to which *P* and *Q* simultaneously belong, are trivial, because the product $\psi_P\psi_Q$, and thus the coefficients a_{LMPQ} and b_{iLMPQN} are then equal to zero.

As equations (91) and (92) are not compatible with the equation of state (36a), it follows that this equation is not satisfied within Δ^e.

A generalized equation of state can be established if a Lagrangian variation

$$\delta E^e=-\int_{\Delta^e}p\,\delta(\mathrm{d}\Delta^e) \tag{102}$$

of the internal energy of a general element *e*, corresponding to a Lagrangian variation of the density of the form

$$\delta\rho=\varphi^e_{LM}(\mathbf{x})\,\delta\rho_{LM} \tag{103}$$

where $\delta\rho_{LM}$ denotes a Lagrangian variation of ρ at node *LM*, is admitted to be the same, whether it is computed with the distribution of pressure yielded by the equation of state (36b) or with the distribution defined by (92).

In the first case, we have, by virtue of (36a), (50) and (102),

$$\delta E^e=-\int_{\Delta^e}\rho^2\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho}\delta(\mathrm{d}\Delta^e)=\int_{\Delta^e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho\rho\,\mathrm{d}\Delta^e=$$

$$=\int_{\Delta^e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho}\rho\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e\,\delta\rho_{PQ} \tag{104}$$

In the second case, by virtue of (91), (96) and (102),

$$\delta E^e=-\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M\rho\,\delta\,\mathrm{d}\Delta^e\pi^e_{LM}=$$

$$=\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M\,\delta\rho\,\mathrm{d}\Delta^e\pi^e_{LM}=\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e\,\delta\rho_{PQ}\pi^e_{LM} \tag{105}$$

Comparison of (104) and (105) yields

$$\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e\pi^e_{LM}\,\delta\rho_{PQ}=$$

$$=\int_{\Delta^e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho}\rho\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e\,\delta\rho_{PQ} \tag{106}$$

and, as $\delta\rho_{PQ}$ is arbitrary,

$$g^e_{LMPQ}\pi^e_{LM}=h^e_{PQ}(\rho) \tag{107}$$

where

$$g^e_{LMPQ}=\int_{\Delta^e}\psi^e_L\psi^e_M\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e \tag{108}$$

$$h^e_{PQ}(\rho)=\int_{\Delta^e}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\rho}\rho\varphi^e_{PQ}\,\mathrm{d}\Delta^e \tag{109}$$

Equation (107), which contains indeed as many equations as unknowns π^e_{LM}, is the generalized equation of state for element *e*.

An important point is that $\delta\rho$ given by (103) is not always a Lagrangian variation of ρ on the set of functions defined by (91).

The expression of such variation is indeed, by virtue of (90b)

$$\delta\rho=\varphi^e_{RS}(\mathbf{x})\,\delta_E\,\rho_{RS}+\varphi^e_{RS,i}(\mathbf{x})\,\delta u_i\,\rho_{RS}$$

$$=\varphi^e_{RS}(\mathbf{x})\,\delta_E\,\rho_{RS}+\varphi^e_{RS,i}(\mathbf{x})\psi^e_N(\mathbf{x})\rho_{RS}\,\delta u_{iN} \tag{110}$$

where $\delta_E\rho_{LM}$ denotes an Eulerian variation of ρ at the node *RS*.

The Lagrangian variation of ρ at node *LM* is thus given by

$$\delta\rho_{LM}=\varphi^e_{RS}(LM)\,\delta_E\rho_{RS}+\varphi^e_{RS,i}(LM)\psi^e_N(LM)\rho_{RS}\,\delta u_{iN} \tag{111}$$

which, by virtue of (95), can be transformed into

$$\delta\rho_{LM}=\delta_E\rho_{LM}+\varphi^e_{RS,i}(LM)\psi^e_N(LM)\rho_{RS}\,\delta u_{iN} \tag{112}$$

Introducing (112) into (103), there results

$$\delta\rho=\varphi^e_{LM}(\mathbf{x})\,\delta_E\rho_{LM}+\varphi^e_{LM}(\mathbf{x})\varphi^e_{RS,i}(LM)\psi^e_N(LM)\rho_{RS}\,\delta u_{iN} \tag{113}$$

Comparing (113) with (110), there results that, in order that the two expressions of $\delta\rho$ be the same, it is necessary that

$$\varphi^e_{RS,i}(\mathbf{x})\psi^e_N(\mathbf{x})=\varphi^e_{LM}(\mathbf{x})[\varphi^e_{RS,i}(LM)\psi^e_N(LM)] \tag{114}$$

This means that each function $\varphi^e_{RS,i}(\mathbf{X})\psi^e_N(\mathbf{X})$ must have the same distribution on Δ^e as the density ρ (see (91)).

Such a condition can easily be satisfied as we are going to show.

We observe that, considering the number of vertices and mid-edge nodes, magnitude v_i can be given an arbitrary linear distribution, while ρ and p/ρ can each be given an arbitrary quadratic distribution, within Δ^e. Functions $\varphi^e_{RS}(\mathbf{X})$ will therefore be quadratic, functions $\psi^e_N(\mathbf{X})$ will be linear and functions $\varphi^e_{RS,i}(\mathbf{X})\psi^e_N(\mathbf{X})$ will be quadratic, which means that $\varphi^e_{RS,i}(\mathbf{X})\psi^e_N(\mathbf{X})$ presents, on Δ^e, the same distribution as ρ.

Let us make φ stationary in the Lagrangian way on the set of the discrete fields which satisfies equations (99) and (107) and the conditions

$$u_{iN}(t_1) = \overline{u_{iN}(t_1)} \tag{115}$$

$$u_{iN}(t_2) = \overline{u_{iN}(t_2)} \tag{116}$$

$$\rho_N(t_1) = \overline{\rho_N(t_1)} \tag{117}$$

$$\rho_N(t_2) = \overline{\rho_N(t_2)} \tag{118}$$

We start by determining δT:

$$\delta T = \delta \sum_e \tfrac{1}{2} \int_{\Delta^e} v_i v_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e = \delta \sum_e \tfrac{1}{2} \int_{\Delta^e} \psi^e_L \psi^e_M \rho \, \mathrm{d}\Delta^e v_{iL} v_{iM}$$

$$= \sum_e \tfrac{1}{2} \int_{\Delta^e} \psi^e_L \psi^e_M \, \delta(\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) v_{iL} v_{iM} + \sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta v_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{119}$$

Considering (96), δT becomes

$$\delta T = \sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta v_i \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{120}$$

Now as equation (49) is still valid, (120) can be transformed into

$$\delta T = \sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta v_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta u_i \, \rho \, \mathrm{d}\Delta^e - \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta u_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e -$$

$$- \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i \dot{v}_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e - \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i v_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) \tag{121}$$

As, by virtue of (90a), (90b) and (96),

$$\sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta u_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) =$$

$$= \sum \int_{\Delta^e} \psi^e_L \psi^e_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \, \mathrm{d}\Delta^e) \, \delta u_{iL} v_{iM} = 0. \tag{122}$$

we finally obtain

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, \mathrm{d}t = \left[\sum_e \int_{\Delta^e} v_i \, \delta u_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i \dot{v}_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{123}$$

or, by virtue of (115) and (116),

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, \mathrm{d}t = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_e \int_{\Delta^e} \delta u_i \, \dot{v}_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{124}$$

As

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j, \tag{125}$$

equation (124) yields

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \, \mathrm{d}t = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_e \int_{\Delta^e} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right) \delta u_i \, \mathrm{d}\Delta^e$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} (c_{PQNL} \rho_{PQ} \dot{v}_{iN} + d_{jPQNML} \, \rho_{PQ} v_{iN} v_{jM}) \, \delta u_{iL} \, \mathrm{d}t \tag{126}$$

where

$$c_{PQLN} = \sum_e \int_{\Delta^e} \varphi_{PQ} \psi_N \psi_L \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{127}$$

$$d_{jPQNML} = \sum_e \int_{\Delta^e} \varphi_{PQ} \psi_{N,j} \psi_M \psi_L \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{128}$$

The expression of the internal energy variation can easily be determined if equations (97) and (98) are considered. We find

$$\delta E = \sum_e \int_{\Delta^e} \psi^e_L \psi^e_M \, \delta\rho \, \mathrm{d}\Delta^e \pi^e_{LM} =$$

$$= - \sum_e \int_{\Delta^e} \psi^e_L \psi^e_M \rho \, \mathrm{div} \, \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}\Delta^e \pi^e_{LM}$$

$$= - \sum_e \int_{\Delta^e} p \, \mathrm{div} \, \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}\Delta^e = - \sum_e \int_{\Delta^e} p \psi_{N,i} \, \mathrm{d}\Delta^e \, \partial u_{iN} \tag{129}$$

or

$$\delta E = e_{iN} \, \delta u_{iN} \tag{130}$$

if we make

$$e_{iN} = - \sum_e \int_{\Delta^e} p \psi_{N,i} \, \mathrm{d}\Delta^e \tag{131}$$

Let us consider finally the terms of V due to the external forces,

$$V_e = -\sum_e \int_{\Delta^e} \bar{f}_i x_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e + \int_{B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} x_n \rho \, \mathrm{d}B \tag{132}$$

We assume $\bar{f}_i$ and (p/ρ) to be of the form

$$\bar{f}_i = \psi_N^e \bar{f}_{iN} \tag{133a}$$

$$\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} = \psi_N^e \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_N \tag{133b}$$

within Δ^e and on $B_1 \cap B^e$.

Therefore, by virtue of (96),

$$\delta V_e = -\sum_e \int_{\Delta^e} \bar{f}_i \, \delta u_i \rho \, \mathrm{d}\Delta^e + \sum_e \int_{B^e \cap B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \delta u_n \rho \, \mathrm{d}B \tag{134}$$

so that, making

$$\bar{f}_{iN} = \sum_e \left[\int_{\Delta^e} \bar{f}_i \psi_N^e \, \mathrm{d}\Delta^e - \int_{B^e \cap B_1} \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} \psi_N^e n_i \rho \, \mathrm{d}B^e \right] \tag{135}$$

we can write

$$\delta V_e = -f_{iN} \, \delta u_{iN} \tag{136}$$

Consideration of (126), (130) and (136) yields

$$\delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} (-c_{PQNL} \rho_{PQ} \dot{v}_{iN} - d_{jPQNML} \rho_{PQ} v_{iN} v_{jM} + \\ + e_{iL} + \bar{f}_{iL}) \, \delta u_{iL} \, \mathrm{d}t \tag{137}$$

The necessary and sufficient condition for φ becoming stationary is thus

$$\rho_{PQ}(c_{PQNL} \dot{v}_{iN} + d_{jPQNML} \rho_{PQ} v_{iN} v_{jN}) - e_{iL} - \bar{f}_{iL} = 0 \tag{138}$$

The number of equations in (138) is equal to the number of unknowns v_{iN}.

The set of generalized equations (99), (107) and (138), together with the initial conditions (117) and (118) and the boundary conditions

$$v_{iN} = v_i(N) \tag{139}$$

are sufficient for the determination of the unknowns v_{iN}, ρ_{LM} and π_{LM}^e.

Unknowns u_{iN} can be determined from (123) and the initial conditions (115) and (116).

We point out that the solution of the discrete equations (137), (99), (107) and (123), together with the initial and final conditions (115)–(118) and boundary conditions (138) make functional φ stationary under the conditions (99), (107), (123), (138) and (115)–(118).

It is important to observe that, as equations (99), (107) and (128) (or (28), (31) and (36a)) and their boundary and initial conditions form a self-contained system which does not involve the displacements, the distribution of the velocities, density and pressure can be determined on Δ without the concept of displacement even being considered.

Equations (129) are practically the same as the ones presented by Oden.[8] The continuity equation is different, however. On the other hand, Oden considers only one kind of nodes and not two kinds as we are obliged to do in the present paper.

Order of approximation

The elements of space X are now the inertial fields on Δ. The norm of an arbitrary element $x \in X$ is given by

$$\|x\| = \sqrt{\left[\sum_e \int_{\Delta^e} (v_i v_i + \rho^2 + p^2) \, \mathrm{d}\Delta^e \right]} \tag{140}$$

According to the minimum theorem, the subset $C \subset X$ is the set of all the continuous fields (i.e., the set of all the fields which satisfy the continuity equation, the equation of state and the velocity boundary conditions) which satisfy the initial conditions (53–56).

The elements of X' are the inertial fields which satisfy equations (90a), (91)–(93) within each subdomain, and the elements of C' are the elements of X' which satisfy the generalized continuity equation (99), the generalized equation of state (107), the boundary condition (139) and the initial conditions (115)–(118). The B-projections of each element χ of X in X' are the elements of X' which present the same nodal values as the displacements, velocities and density as χ.

The approximation theorem mentioned in section 'Results of the theory of variational methods' states that a definition of distance can be introduced such that (1) holds, but the physical meaning of such distance is not obvious in the general case.

In what concerns the present case, a discussion of the physical meaning is intended to be made in the near future. Meanwhile, it does no harm to think of the distance between two fields as the norm of the difference between them, i.e.,

$$d(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\| \tag{141}$$

The variation of the functional φ from an element $x \in X$ to another element within a very small distance from χ is, considering (42)–(44), given by

$$\delta_x \varphi = O(|\delta_x \mathbf{u}|) + O(|\delta_x \mathbf{v}|) + O(\delta_x \rho) \tag{142}$$

$\delta_x \varphi$ is thus of the order of l^{n+1} if

(i) n is the degree of highest degree complete polynomial of arbitrary coefficients contained in the expressions for the velocities and densities within each subdomain Δ^e,

(ii) all the derivatives of the velocities and densities associated with χ, with order $n+1$ or less are bounded within each subdomain Δ^e.

Equation (93) ensures that conditions (i) and (ii) are satisfied for $n = 1$.

No reference is needed to the displacements in conditions (i) and (ii) because, as the velocities remain the derivatives with respect to time of the displacements, these conditions are satisfied by the displacements whenever they are satisfied by the velocities.

Observing that $\bar{d}(s_a, s_a')$ is of higher order than $\sqrt{(\delta_a \varphi)}$, we can write (see (1)):

$$\bar{d}^2(s, s_a') \leqslant |\delta_s \varphi| + |\delta_a \varphi| \tag{143}$$

and state the distance between the exact and approximate solutions is of the order of $l^{(n+1)/2}$ (see section 'Viscous non-inertial flow') if:

(a) condition (i) is satisfied,

(b) condition (ii) is also satisfied by the exact and the approximate solutions (whatever the value of l),

(c) both the exact and approximate solutions are stable.

Requirement (c) results from the fact that the variational principle is a minimum principle only in case of stability.

We observe, however, that the exact and approximate solutions which are being considered refer to a problem which is not the usual one.

The initial and final values of the displacements and density are indeed assumed prescribed (first problem), while the values which are usually prescribed are the initial values of the displacements, velocities and density (second problem). The first derivative of the density with respect to time is not mentioned because its values is connected to the values of the velocities and density through the continuity equation.

In this second problem, condition (b) must hold both for the exact solution s and for the discrete solution s_a'' corresponding to the same initial and final values of the displacements and density as the exact solution, in order that it may be ensured that the distance between s and the approximate solution s_a' be of the order of $l^{(n+1)/2}$.

A proof of this statement can easily be made by considering the Banach space of the generalized constraints $\mathscr{C}'$ and the linear function $\gamma'(\chi')$ which associates to each element of X' an element of $\mathscr{C}'$.[3] As $\|s - s_a''\|$ is clearly of the order of $l^{(n+1)/2}$ and γ' is assumed continuous, it follows that $\|\gamma'[B(s)] - \gamma'(s_a'')\|_{\mathscr{C}'}$ is also of the order of $l^{(n+1)/2}$.

On the other hand, $B(s)$ and s' are isoconstrained,, i.e.,

$$\gamma'[B(s)] = \gamma'(s_a') \tag{144}$$

Therefore, as operator γ' is assumed bounded,

$$\|\gamma'(s_a') - \gamma'(s_a'')\|_{\mathscr{C}'} = O(l^{(n+1)/2}) \tag{145}$$

Calling now $\gamma_{D'}'$, the subset of γ' with the same range as γ' but whose domain is the set $X_{D'}'$ of the elements of X' which equilibrates the same system D' of external forces as s_a', we can write, considering that s_a'' belongs to $X_{D'}'$ and that γ' is linear,

$$\|\gamma_{D'}'(s_a' - s_a'')\|_{\mathscr{C}'} = O(l^{(n+1)/2}) \tag{146}$$

Now, by virtue of the uniqueness assumption, function $\gamma_{D'}'$ has an inverse and, by virtue of stability, such an inverse is continuous, so that (145) implies

$$\|s_a' - s_a''\| = O(l^{(n+1)/2}) \tag{147}$$

and, therefore,

$$\|s - s_a'\| = O(l^{(n+1)/2}) \tag{148}$$

Of course, it cannot be forgotten that the only error which is being discussed is the discretization error due to the use of the finite element method for the integration of the continuous equations with respect to the space co-ordinates, not with respect to time.

The discrete equations are thus supposed to be exactly integrated with respect to time and no round--off error is considered.

VISCOUS INERTIAL FOW

We assume that a viscous inertial fluid is a complex body resulting from the association of two simpler bodies: a viscous non-inertial fluid and an inertial non--viscous fluid. The magnitudes referring to the first will be denoted by index V. The magnitudes referring to the second will be denoted by index I. The symbols with no index refer to the complex body.

The kind of association can be defined by requiring that the values of the stresses in the complex body (no index) result from adding the stresses of the simpler ones, and that the kinematical magnitudes (displacements, velocities, strains) and the density have the same values in the complex body and in the simpler ones. These kinematical magnitudes and the density are denoted therefore by no index.

By virtue of the conventions just established equations (8)–(11) may be rewritten in the form

$$\sigma_{ij,i}^{\mathrm{I}} - p_{,j}^{\mathrm{I}} + \rho f_j^{\mathrm{I}} = 0 \tag{8'}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} + \tfrac{1}{3}\dot{\epsilon}\,\delta_{ij} = \tfrac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{9'}$$

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{T}V} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} \tag{10'}$$

$$p^V = -\kappa\dot{\epsilon} \tag{11'}$$

and equations (28), (31) and (36a) in the form

$$\rho\dot{v}_j + p_{,j}^{\mathrm{T}} = \rho\bar{f}_j^I \tag{28'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{31'}$$

$$p^I = f(\rho) \tag{32'}$$

Adding equations (8′) and (28′), we obtain

$$\sigma_{ij,i}^{\mathrm{T}} - (p^V + p^I)_{,j} + \rho(\bar{f}_j^I + \bar{f}_j^V) - \rho\dot{v}_j = 0 \tag{149}$$

Considering that

$$\sigma_{ij}^{TV} = \sigma_{ij}^{T} \tag{150}$$

$$p^V + p^I = p \tag{151}$$

$$\bar{f}_j^V + \bar{f}_j^I = \bar{f}_j \tag{152}$$

(149) can be transformed into

$$\sigma_{ij,i}^{T} - p_{,j} + \rho\bar{f}_j - \rho\dot{v}_j = 0 \tag{153}$$

Equations (153), (9'), (31'), (10') and the equation

$$p = f(\rho) - \kappa\dot{\epsilon} \tag{154}$$

which results from adding equations (11') and (32'), are the continuous equations governing the viscous non-inertial flow.

The 3 equations contained in (153), the 6 equations contained in (9'), the 5 independent equations contained in (10'), equation (31') and equation (154) make 16 equations.

The unknowns are also 16 : 3 velocities, 6 rates of strain $\dot{\epsilon}_{ij}^{T}$ and $\dot{\epsilon}$, 5 independent stresses σ_{ij}^{T}, the pressure p and the density ρ.

Eliminating the stresses and the rates of strain, we obtain Navier-Stokes equation :

$$\mu\nabla^2 v_j + \frac{\mu}{3} v_{i,ij} - p_{,j} + \rho\bar{f}_j - \rho\dot{v}_j = 0 \tag{155}$$

Combining boundary conditions (14) and (15) with (37) and (38) yields

$$\frac{\sigma_{ij}^{T}}{\rho} n_i - \frac{p}{\rho} n_j = \bar{\pi}_j \quad \text{on} \quad B_1 \tag{156}$$

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{on} \quad B_2 \tag{157}$$

Combination of the internal boundary conditions (16) and (17) with (39a) and (40) yields

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{ij}^{T})^{+} n_i - p^{+} n_j &= (\sigma_{ij}^{T})^{-} n_i - p^{-} n_j \quad (158) \\ v_i^{+} &= v_i^{-} \quad (159) \end{aligned}\right\} \text{on} \quad \Gamma$$

Let us assume now tetrahedral subdomains of the same kind as the ones considered in section 'Inertial non-viscous flow'.

The discrete equations for the viscous non-inertial fluid are

$$m_{ijMN} v_{iM} = \bar{f}_{jN}^{V} \tag{23'}$$

The discrete equations for the inertial non-viscous flow are

$$\rho_{PQ}(c_{PQNL}\dot{v}_{iN} + d_{jPQNML}\rho_{PQ} v_{iN} v_{jM}) - e_{iL}^{I} - \bar{f}_{iL}^{I} = 0 \tag{138'}$$

$$a_{LMPQ}\dot{\rho}_{PQ} + b_{iLMPQN}\rho_{PQ} v_{iN} = 0 \tag{99'}$$

$$g_{LMPQ}^{e}\pi_{LM}^{eI} = h_{PQ}^{e}(\rho) \tag{107'}$$

Combining (23') and (138') yields

$$\rho_{PQ}(c_{PQNL}\dot{v}_{iN} + d_{jPQNML}\rho_{PQ} v_{iN} v_{jM}) - e_{iL}^{I} - \bar{f}_{iL} = 0 \tag{160}$$

where

$$\bar{f}_{iL} = \bar{f}_{iL}^{I} + \bar{f}_{iL}^{V} = \sum \left[\int_{\Delta^e} \psi_L^e \bar{f}_i \, d\Delta^e + \int_{B^e \cap B_1} \psi_L^e \bar{\pi}_i \, dB^e \right] \tag{161}$$

Equations (160), (99') and (107') form the system of discrete equations which governs the viscous inertial flow. Its solution provides of course an approximate solution for Navier-Stokes equation.

Let us discuss now the order of approximation.

A set of velocity, strain rate, density and pressure fields will be called a viscous inertial field.

The set of all possible viscous inertial fields forms a vector space which becomes a Banach space X if a norms is introduced. The norm of an element $x \in X$ is defined as

$$\|x\| = \sqrt{\left[\sum_e \int_{\Delta^e} (v_i v_i + \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + \rho^2 + p^2) \, d\Delta^e \right]} \tag{162}$$

Let us consider now the Banach spaces X^V and X^I of all possible viscous and inertial fields and let x^V and x^I denote the fields which correspond to x when the decomposition of the complex body into simpler ones is considered.*

We denote the norm of X^V and X^I by $\|x\|_V$ and $\|x\|_I$. As

$$\|x\|_V = \sqrt{\left[\sum_e \int_{\Delta^e} \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \, d\Delta^e \right]} \tag{163}$$

$$\|x\|_I = \sqrt{\left[\sum_e \int_{\Delta^e} (v_i v_i + \rho^2 + p^2) \, d\Delta^e \right]} \tag{164}$$

it is clear that

$$\|x\| \leqslant \|x\|_V + \|x\|_I \tag{165}$$

We call the distance between two fields in X the norm of their difference, i.e.,

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| \tag{166}$$

The systems of external forces which can act on the body are defined by a body force density vector function $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ and by a traction vector function $\bar{\pi}(\mathbf{x}, t)$ on B_1.

We introduce the Banach space $\mathscr{D}$ whose elements are pairs of functions $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ and $\bar{\pi}(\mathbf{x}, t)$. The norm of an element $D \in \mathscr{D}$ may be defined as

* This means of course that the displacements, velocities and density take the same values in x^I, x^V and x.

$$\|D\|_{\mathscr{D}} = \sqrt{\left\{\int_{t_1}^{t_2} \sum_e \left[\int_{\Delta^e} \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{f}}\, \mathrm{d}\Delta^e + \int_{B^e \cap B_1} \bar{\boldsymbol{\pi}} \cdot \bar{\boldsymbol{\pi}}\, \mathrm{d}B^e\right] \mathrm{d}t\right\}} \tag{167}$$

We also introduce the function $\delta(\chi)$ with domain X and range $\mathscr{D}$ which associates which each element of X an element of $\mathscr{D}$ such that equations (153) and (156) are saisfied.

We assume the portion of the fluid which occupies the domain Δ decomposed into Eulerian finite elements and call X^V, X^I and X' the subspaces of X^V, X^I and X which correspond to such decomposition.

We define the interpolation operators B^V and B^I as the interpolation operators in sections 'Viscous non--inertial flow' and 'Inertial non-viscous flow'. The interpolation operator B is of course defined to be such that, if χ^V and χ^I represent the decomposition of χ, $B^V(\chi^V)$ and $B^I(\chi^I)$ represent the decomposition of $B(\chi)$. In other words, the B-projections in X' of the elements of X are the fields in X' which present the same nodal values of the displacements, velocities and density.

We call :

C^V the set of fields in X which satisfy the discrete boundary conditions (22),

C^I the set of fields in X which satisfy (22) or (138') and also (99') and (107'),

C' the set of fields in X' which satisfy all these equations simultaneously,

$\mathscr{D}$ the Banach space whose elemcnts are sets of functions $\bar{f}_{iL}(t)$ defined on the interval (t_1, t_2), the norm in $\mathscr{D}$ being given by

$$\|D'\|_{\mathscr{D}'} = \sqrt{\left(\int_{t_1}^{t_2} \bar{f}_{iL} \bar{f}_{iL}\, \mathrm{d}t\right)} \tag{168}$$

$\delta_{C'}(\chi')$ the function with domain C' and range $\mathscr{D}$ which associates to each element of C' the element of $\mathscr{D}$ such that equation (160) is satisfied,

$\delta^V_{C'}(\chi^V)$ and $\delta^I_{C'}(\chi^I)$ the corresponding functions for the viscous non-inertial and for the inertial non-viscous fluids,

A^V, A^I and A the approximation operators corresponding to the two simple models and to the complex model which are being considered, which means that, if s^V represents the solution of the viscous non-inertial continuous equations, $A^V(s^V)$ represents the solution of the corresponding discrete equations, and so on.

As the type of association is such that the external forces acting on the complex body represent the sum of the forces acting on the simpler component bodies, we can write, if χ^V and χ^I represent the decomposition of χ'.

$$\delta^V_{C'}(\chi^{V'}) + \delta^I_{C'}(\chi^I) = \delta_{C'}(\chi') \tag{169}$$

Assuming that the approximation conditions in sections 'Viscous non-inertial flow' and 'Inertial non--viscous flow' are satisfied by the expressions for the different fields within the subdomains Δ^e and by the pairs of solutions s^V and $A^V(s^V)$, s^I and $A^I(s^I)$, we can write

$$\|s^V - A^V(s^V)\|_V = O(l^{(n+1)/2}) \tag{170}$$

$$\|s^I - A^I(s^I)\|_I = O(l^{(n+1)/2}) \tag{171}$$

and, of course,

$$\|s^V - B^V(s^V)\|_V = O(l^{(n+1)/2}) \tag{172}$$

$$\|s^I - B^I(s^I)\|_I = O(l^{(n+1)/2}) \tag{173}$$

Combining (170) and (172), (171) and (173) yields

$$\|B^V(s^V) - A^V(s^V)\|_V = O(l^{(n+1)/2}) \tag{174}$$

$$\|B^I(s^I) - A^I(s^I)\|_I = O(l^{(n+1)/2}) \tag{175}$$

Now, as $B^V(s^V)$ and $B^I(s^I)$ represent the decomposition of $B(s)$, we can write (see (170))

$$\delta^V_{C'}[B^V(s^V)] + \delta^I_{C'}[B^I(s^I)] = \delta_{C'}[B(s)] \tag{176}$$

On the other hand, as

$$\delta^V(s^V) + \delta^I(s^I) = \delta(s) \tag{177}$$

there results, by virtue of equations (25), (135) and (161),

$$\delta^V_{C'}[A^V(s^V)] + \delta^I_{C'}[A^I(s^I)] = \delta_{C'}[A(s)] \tag{178}$$

Subtracting (178) from (176), and considering that functions $\delta^V_{C'}$, $\delta^I_{C'}$ and $\delta_{C'}$ are linear, we obtain

$$\delta^V_{C'}[B^V(s^V) - A^V(s^V)] + \delta^I_{C'}[B^I(s^I) - A^I(s^I)] = \delta_{C'}[B(s) - A(s)] \tag{179}$$

But as such functions are also continuous, we can write, considering (174) and (175),

$$\|\delta^V_{C'}[B^V(s^V) - A^V(s^V)]\|_{\mathscr{D}'} = O(l^{(n+1)/2}) \tag{180}$$

$$\|\delta^I_{C'}[B^I(s^I) - A^I(s^I)]\|_{\mathscr{D}'} = O(l^{(n+1)/2}) \tag{181}$$

and then, considering (179),

$$\|\delta_{C'}[B(s) - A(s)]\|_{\mathscr{D}'} = O(l^{(n+1)/2}) \tag{182}$$

The uniqueness and stability assumptions enable us to conclude that

$$\|B(s) - A(s)\| = O(l^{(n+1)/2}) \tag{183}$$

As, on the other hand, by virtue of (165), (172) and (173),

$$\|s - B(s)\| = O(l^{(n+1)/2}), \tag{184}$$

there results

$$\|s - A(s)\| = O(l^{(n+1)/2}) \tag{185}$$

or, considering (166) and the fact that $A(s)$ is s'_a,

$$d(s, s'_a) = O(l^{(n+1)/2}) \tag{186}$$

The distance between the exact and approximate solution is thus of the order of $l^{(n+1)/2}$ if the requirements for convergence are met by each of the exact solutions s^V and s^I, which result from the decomposition of s, and by the discrete solutions $A^V(s^V)$ and $A^I(s^I)$. The latter, however, do not represent the decomposition of $A(s)$, but the discrete solutions generated by the finite element method applied to the analysis of the viscous non-inertial and inertial non-viscous bodies acted by the same forces which act on the simple bodies within the frame of the continuous theory. As the distribuition of the external forces by the component bodies is altered by discretization, these forces are indeed different from the ones which act on the simple bodies within the frame of the discrete theory.

CONCLUSIONS

The application of a technique based on the decomposition of a complex body, whose mechanical behaviour is not governed by a minimum principle, into simpler ones for which extremum principles are known made it possible to apply the results of a previously developed theory of variational methods to the discussion of the convergence of sequences of finite element approximate solutions of Navier-Stokes equation.

The variational principles for the viscous non-inertial case are well-known.

A variational principle for the inertial non-viscous flow, capable of providing convenient discrete equations, is however one of the main contributions of this paper.

The principle, which involves displacements as well as velocities, is Lagrangian, although the finite elements* are Eulerian. In other words, the decomposition of the domain into finite elements does not change with time, but the variation of the functional which the exact solution makes equal to zero is Lagrangian.

A short discussion of the conditions under which such a variational principle is an extremum principle was included and a connexion was established between such conditions and the stability of the flow.

Sufficient conditions were obtained for the distance between the exact and approximate solutions being of the order of $l^{(n+1)/2}$, were l is the maximum diameter of the finite elements into which the fluid is assumed to be decomposed.

Such conditions will be summarized now and practical convergence tests will be searched.

Assume that the expressions for the velocities, rates of strain and density within each subdomain Δ^e contain a complete polynomial of the nth degree.

In order that the approximation error be of the order of $l^{(n+1)/2}$, two conditions must still be satisfied by the exact solution s and by the solutions of the viscous non-inertial and inertial non-viscous discrete equations corresponding to

— the same forces which equilibrate the fields s^V and s^I resulting from the decomposition of s,

— the same initial and final values of the displacements and density as s.

These conditions are :

(a) The derivatives of the velocities, rates of strain and density with order $n + 1$ or less are all bounded within each subdomain Δ^e.

(b) The solution must be stable

In order that convergence may be achieved, n must be at least equal to zero. This means that the velocities rates of strain and density must be able to take arbitrary constant values within each subdomain Δ^e, and that they must be bounded, as well as their first derivatives, within each subdomain, both in the exact solution and in the discrete solutions mentioned above.

Concerning the exact solution, physical intuition, a qualitative knowledge of the phenomena and general theorems on singularities can be used for establishing the boundedness of the different magnitudes.

Concerning the discrete solutions, a supplementary source of unboundedness is connected with a possible heterogeneity of the types of nodes associated to some patterns of the mesh, as in the structural case.

This second source of unboundedness can be eliminated by resorting to patch tests similar to the one which Irons[4] introduced in the structural case.

A first test, devised to ensure the boundedness of the derivatives of the velocities and density, consists simply in checking for an arbitrary patch if the generalized solution becomes exact when the boundary nodal values of the velocities and the initial nodal values of the velocities and density are the ones which correspond to an arbitrary permanent uniform distribution of the velocities and density and no external forces act on the body.

That it is not necessary to make this test for each particular case is an immediate conclusion of the fact that equations (86) and (160) are indeed satisfied by uniform and permanent nodal values of the velocities and density and by $\vec{f}_{iL} = 0$.

A second test, devised to ensure the boundedness of the derivatives of the rates of strain, is almost identical to the one used in the structural case. It consists in checking for an arbitrary patch if the generalized solution becomes exact when the boundary nodal values of the velocities are the ones which correspond to an arbitrary linear distribution of the velocities, and the initial nodal values of the velocities and density also agree with such distribution and with a uniform ρ.

In the non-viscous case considered in section 'Inertial non- viscous flow' the boundedness of the rates of strain and their derivatives is not necessary for convergence. This second test is thus also not necessary. Attention must be called, however, to the facts that the non-viscous flow is more easily unstable and that discontinuities of the velocities and density are

* Only tetrahedral elements were considered with two kinds of nodes: vertices and mid-edge points.

possible without the rate of the energy density becoming unbounded.

It remains to be shown in a future paper how passing the patch tests is connected with the fact that certain magnitudes remain bounded when the dimensions of the finite elements become indefinitely small.

REFERENCES

1 — E. R. A. Oliveira, 'Mathematical theory of linear structures', in *Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics* (Ed. Oden and Oliveira), UAH Press, 1973.

2 — E. R. A. Oliveira, *A General Theory of Variational Methods with Applications to Finite Elements, Lisbon, 1972.*

3 — B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.

4 — G. R. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, 'Triangular elements in plate bending. Conforming and non-conforming solutions' *Proc. Ist Conf. Matrix Meth. Struct. Mech.*, Wright--Patterson AFB, Ohio (1965).

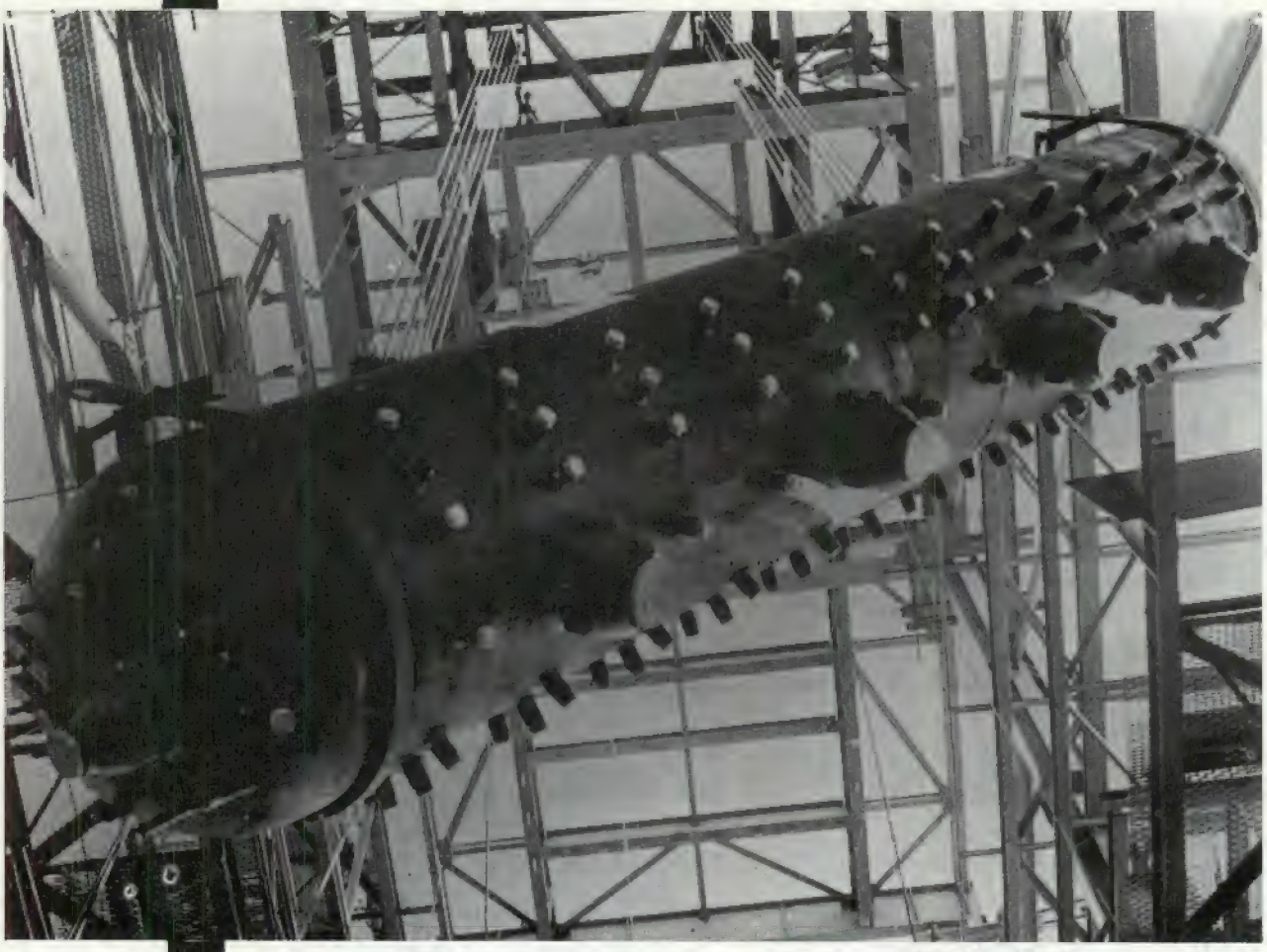
5 — W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, Pitman, London, 1968.

6 — C. Eckart, 'Variational principles in hydrodynamics' *Phys. of Fluids*, 3, 421-427 (1960).

7 — L. Luré, *Méchanique, Analytique*, Masson, Paris, 1968.

8 — J. T. Oden, 'The finite element method in fluid mechanics', in *Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics* (Ed. Oden and Oliveira), UAH Press, 1973.

MAGUE



« Grupo Gerador de Vapor 380 T/h, 130 Kg/cm² 545°C da Central Térmica do Carregado – 5.° escalão – – Içamento do barrilete – »

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

INDUSTRIAIS TEXTEIS

PARA OS VOSSOS MANCHONS, FLANELAS, TRANSPORTADORES, E TODOS OS TECIDOS TÉCNICOS.

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

Consultem:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FABRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESIRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C.P. 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C.P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 7 14 97

NÚMERO 432 JANEIRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 624.074

Cálculo de estruturas reticuladas no espaço

Analysis of space frames

J. S. BRAZÃO FARINHA

RESUMO

Expõe-se sucintamente a aplicação do método de Cross na resolução de estruturas espaciais, constituídas por barras de momento de inércia constante ou variável, de eixo rectilíneo, ortogonais entre si, ou não.
Apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

SYNOPSIS

It is succintly stated the application of the Cross method on the resolution of rigid space structures, constituted by bars of constant or variable inertia, of rectilinear axle, orthogonal between them, or not.
Some application examples are presented.

Na nossa bibliografia técnica existem algumas publicações sobre o tema que vamos abordar, designadamente as indicadas nas referências [4], [5], [6], [7] não havendo todavia nenhuma que considere o problema com generalidade.

A extensão do método de Cross, nos termos adiante referidos, foi exposta por C. Cätuneau, D. Anastesescu e I. Munteanu, na publicação referida em [1].

Como é sabido, no caso de estruturas a três dimensões de barras perpendiculares entre si pode-se aplicar o método de Cross nas condições em que é utilizado correntemente para as estruturas planas, mas acrescentando a rigidez à torção. Neste caso, ao estabelecer o equilíbrio dos diversos nós, os momentos desiquilibrados são de flexão para algumas das barras e de torção para outras, havendo que considerar, para a determinação dos coeficientes de distribuição em cada nó, nas primeiras a rigidez de flexão e nas outras barras, a rigidez de torção, nas condições habituais. O mesmo não acontece com as estruturas de barras oblíquas, e a dificuldade nestas resulta do facto da deformação de uma qualquer das barras que concorre num nó da estrutura, (por virtude da aplicação de um momento de flexão ou de torção no referido nó e que se distribue pelas barras que convergem nesse mesmo nó), ser simultâneamente de flexão e de torção. Não é possível determinar, a priori, as componentes da rotação das barras que concorrem num nó, (condição necessária para poder fazer a distribuição, pelas barras, dos momentos desiquilibrados), a não ser pelo estabelecimento da condição de compatibilidade inicial, que há que resolver à partida.

Por esta dificuldade, mesmo a literatura estrangeira conhecida só tem, em regra, abordado, com o método de Cross, o caso das estruturas no espaço constituídas por barras perpendiculares entre si, onde tal dificuldade não existe.

Para a resolução, no caso mais geral, de uma estrutura no espaço, há que adoptar dois sistemas de eixos ortogonais, um privativo de cada barra que concorre no nó i considerado e o outro (constituído pelos eixos x, y, z com origem no correspondente nó), de referência da estrutura. Do primeiro sistema de eixos dois deles (designados respectivamente por 1 e 2) coincidem com os eixos principais de inércia da secção e o outro (designado pelo algarismo 3) tem a direcção perpendicular ao plano da secção, conforme figura 1.

É necessário orientar os eixos 1, 2, 3 das secções das barras que concorrem em cada nó da estrutura de modo que os respectivos sentidos coincidam com a convenção de sinais de Cross para os momentos das reacções exteriores (positivos quando dão rotação no sentido contrário aos dos ponteiros do relógio). O sentido a tomar para os momentos (vectores representados por setas rectilíneas) será o da progressão da ponta do sacarrolhas quando se imprime a este uma rotação de sentido representado na figura por setas curvas. Porque esta representação é menos clara no desenho, que aparece em perspectiva, preferimos representar os momentos sob a forma vectorial. Uma convenção de sinais deste tipo, que não muda consoante se trata de extremidades esquerda ou direita das barras, tem a vantagem de definir claramente o sentido da actuação dos momentos instalados nas extremidades das barras, trate-se de momentos de flexão ou de momentos de torção.

Pelo contrário, a orientação dos eixos x, y, z é indiferente, havendo apenas que garantir a coerência dos sinais dos cosenos e dos sinais das componentes dos momentos em relação a estes eixos.

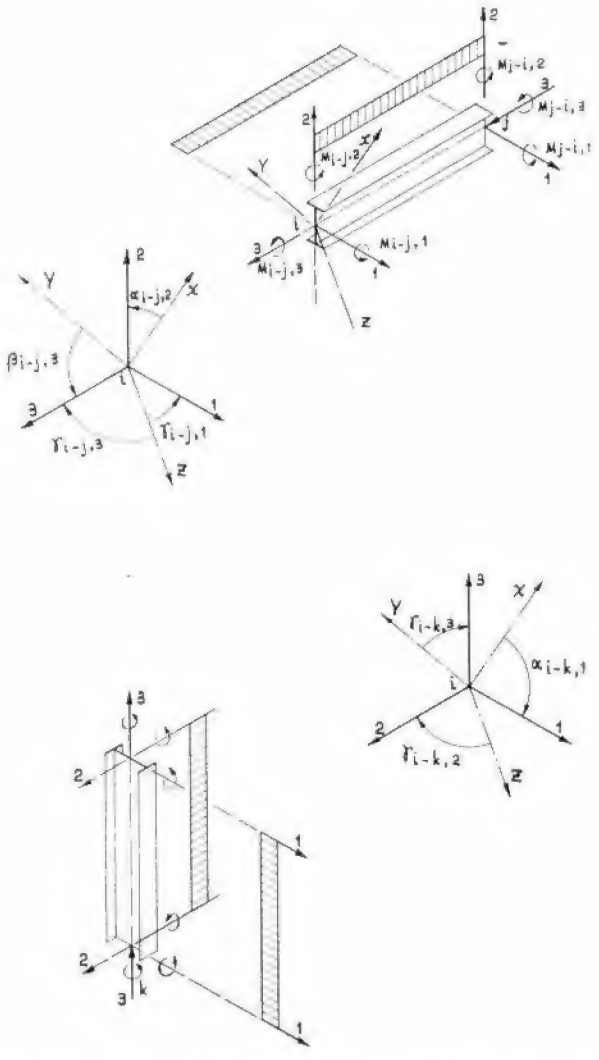


Fig. 1 — Sistemas de eixos de referencia e convenção de níveis positvos no nó i (Cross)

Os ângulos que os eixos 1, 2, 3 relativos à barra i - j fazem com os eixos x, y, z são, respectivamente, designados por α, β, γ. São medidos entre sentidos positivos dos referidos eixos, e descritos do eixo x ou y ou z para o eixo 1 ou 2 ou 3. É a medida do ângulo assim definido, que permite determinar o valor do coseno do respectivo ângulo.

Cada ângulo é referenciado pela indicada letra grega afectada de um índice constituído por duas letras separadas por um hifen definidoras da barra, seguidas de uma virgula de separação e de um número que designa a qual dos eixos 1, 2 ou 3 o ângulo se refere, ver figura 1.

Os momentos são definidos por vectores (os de flexão dirigidos segundo um ou outro dos eixos principais de inércia da secção, portanto 1 ou 2, em relação aos quais o momento de inércia I é respectivamente considerado; os momentos de torção são sempre dirigidos segundo os eixos 3), e pelos sentidos da rotação no plano perpendicular ao vector.

1 — Rigidez e coeficientes de transmissão

Nas estruturas a três dimensões há a considerar as rigidezes junto das respectivas extremidades i, j e segundo os eixos 1e 2 (de flexão) e 3 (de torção).

1.1 — Vigas de momento de inércia constante

No caso da barra de eixo rectilíneo e secção constante perfeitamente encastrada à flexão e à torção, as rigidezes são iguais nas duas extremidades e os seus valores são dados pelas expressões

$$K_{i-j,1} = \frac{4EI_1}{l} \; ; \; K_{i-j,2} = \frac{4EI_2}{l} \; ; \; K_{i-j,3} = \frac{GI_3}{l}$$

em que I_1, I_2 são os momentos de inércia da secção em relação aos eixos 1 e 2, respectivamente, e I_3 o momento de inércia à torção.

Os coeficientes de transmissão tem os valores seguintes flexão $\eta_f = 0{,}5$ e de torção $\eta_t = -1$.

Os valores de I_1, I_2 e I_3 são indicados a seguir, para as secções mais correntes:

Secção circular de raio r

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = \dfrac{\pi}{4} r^4 = 0{,}785\ r^4 \\[2ex] I_3 = \dfrac{\pi r^4}{2} = 1{,}571\ r^4 = 2I_1 = 2I_2 \end{cases}$$

Secção anelar de raios r_e, r_i

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = \dfrac{\pi}{4} (r^4_e - r^4_i) \\[2ex] I_3 = \dfrac{\pi}{2} (r^4_e - r^4_i) = 2I_1 = 2I_2 \end{cases}$$

Secção rectangular de dimensões axb, colocada ao alto em relação ao eixo 1 (a < b, altura b)

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{ab^3}{12} \; ; \; I_2 = \dfrac{ba^3}{12} \\[2ex] I_3 = 4\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \left[1 - 0{,}630 \left(\dfrac{a}{b}\right) + 0{,}052 \left(\dfrac{a}{b}\right)^5\right] I_1 \end{cases}$$

Secção rectangular de dimensões axb, colocada ao baixo em relação ao eixo 1 (a < b, altura a)

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{ba^3}{12} \; ; \; I_2 = \dfrac{ab^3}{12} \\[2ex] I_3 = 4\left[1 - 0{,}630\left(\dfrac{a}{b}\right) + 0{,}052\left(\dfrac{a}{b}\right)^5\right] I_1 \end{cases}$$

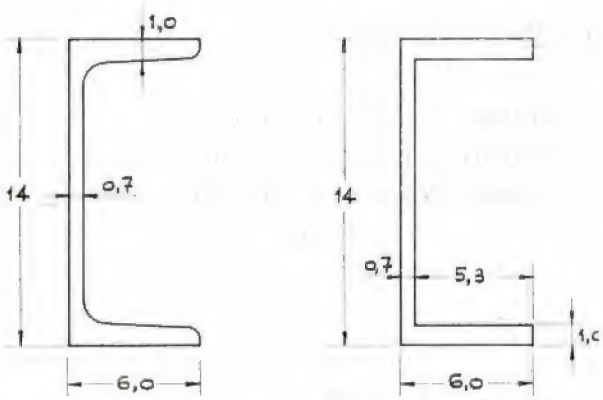


Fig. 2 — Cálculo do valor de I numa secção metálica

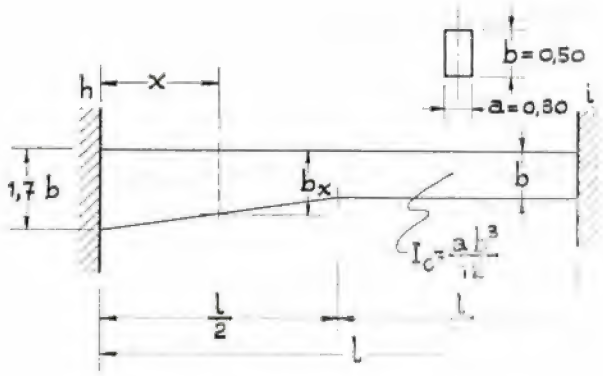


Fig. 3 — Barra de momento de inércia variável

O quadro 1 indica os valores de I_3 relativos à secção rectangular, para relações entre a altura e a base variaveis de 0,1 a 5.

Para uma secção rectangular estreita, de altura b muito maior do que a, $I_3 = \frac{a^3 b}{3}$

No caso de uma secção I ou T, tomar I_3 igual à soma dos valores que correspondem aos rectangulos em que a secção se pode dividir.

Assim, no caso da secção UNP14, fig. 2, para a alma da viga temos:

$$I'_3 = \frac{0{,}7^3 \times 14}{3} = 1{,}60 \text{ cm}^4$$

e para os banzos

$$I''_3 = 2 \times \frac{1{,}0^3 \times 5{,}3}{3} = 3{,}53$$

donde se tira:

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 5{,}13 \text{ cm}^4$$

Nas secções de betão armado pode considerar-se apenas a área do betão, não entrando em consideração com a existência das armaduras de aço.

1.2 — Vigas de momento de inércia variável

No caso de secções de momento de inércia variável, vejamos, através de um exemplo, como se podem calcular as rigidezes da viga representada na fig. 3, de largura constante a.

Quadro 1 — Valores de I_3/I_1

alt. da viga / larg. da viga = a/b	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
I_3/I_1	3,75	3,50	3,24	2,99	2,75	2,50	2,27	2,05	1,85	1,69
alt. da viga / larg. da viga = b/a	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00
I_3/I_1	1,38	1,14	0,955	0,806	0,687	0,591	0,513	0,449	0,396	0,351
alt. da viga / larg. da viga = b/a	3,20	3,40	3,60	3,80	4,00	4,20	4,40	4,60	4,80	5,00
I_3/I_1	0,314	0,282	0,255	0,231	0,211	0,193	0,177	0,163	0,151	0,140

A aplicação de um momento flector $K_{h-i,1}$ na extremidade h de modo que faça rodar o apoio h de rotação $\theta_h = 1$ conduz à instalação de reacções de apoio R e momentos M ao longo da viga de tal modo que se verifica o sistema de equações (*)

$$\begin{cases} K_{h-i,1}\displaystyle\int_0^l \frac{dx}{I_x} + R_{h-i,1}\int_0^l \frac{x}{I_x}\,dx = E \\ K_{h-i,1}\displaystyle\int_0^l \frac{x}{I_x}\,dx + R_{h-i,1}\int_0^l \frac{x^2}{I_x}\,dx = 0 \end{cases}$$

sistema este que determina os dois valores

$$\begin{cases} K_{h-i,1} = \dfrac{E\displaystyle\int_0^l \frac{x^2}{I_x}\,dx}{\displaystyle\int_0^l \frac{dx}{I_x}\int_0^l \frac{x^2}{I_x}\,dx - \left(\int_0^l \frac{x}{I_x}\,dx\right)^2} \\ \eta_{h-i,1} = \dfrac{\displaystyle\int_0^l \frac{x}{I_x}\,dx}{\displaystyle\int_0^l \frac{x^2}{I_x}\,dx} - 1 \end{cases}$$

Estas expressões são válidas para a determinação de $K_{h-i,2}$ e $\eta_{h-i,2}$, trocando a altura da viga com a sua largura. Para o caso anterior a altura da viga é variável (b_x) e a largura (a) é constante, agora será a altura constante a e a largura variável (b_x)

Tomando para referência a altura b na zona de secção constante,

$$I_{x,1} = \left(\frac{b_x}{b}\right)^3 I_o$$

calculando-se através desta expressão os valores que constam do quadro 2. Tomando depois, para referência a largura "a" na zona de secção constante, obtem-se

$$I_{x,2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b_x}{b}\, I_o$$

construindo-se de modo identico o quadro 3, sendo

$$I_o = \frac{ab^3}{12}$$

o momento de inércia em relação ao eixo 1, na zona em que a viga tem secção constante.

Pela regra de Simpson teremos, em relação aos valores do quadro 2,

$$\int_0^l \frac{dx}{I_x} = \frac{0{,}05 l}{3 I_o} \times$$
$$\times [\,0{,}20354 + 1{,}00000 + 2(0{,}26340 + 0{,}34924 + 0{,}47683 +$$
$$+ 0{,}67497 + 5\times 1{,}00000) + 4(0{,}23090 + 0{,}30230 +$$
$$+ 0{,}40644 + 0{,}564447 + 0{,}81629 \times 5 \times 1{,}00000\,] =$$
$$= \frac{0{,}73357}{I_o}\, l$$

e, analogamente,

$$\int_0^l \frac{x}{I_o}\,dx = 0{,}44853 \frac{l^2}{I_o}\,; =$$

$$= \int_0^l \frac{x^2}{I_x}\,dx = 0{,}31923 \frac{l^3}{I_o}$$

e analogamente, do quadro 3,

$$\int_0^l \frac{dx}{I_x} = \frac{0{,}05\ l}{3\ I_o} \times$$
$$\times [\,1{,}63399 + 2{,}77778 + 2\ (1{,}78063 + 1{,}95618\ 2{,}17014 +$$
$$+ 2{,}43665 + 5\times 2{,}77778) + 4(1{,}70416 + 1{,}86428 +$$
$$+ 2{,}05761 + 2{,}29568 + 2{,}59605 + 5\times 2{,}77778\,] =$$
$$= 2{,}44172 \frac{l}{I_o}$$

$$\int_0^l \frac{x}{I_x} = 1{,}32805 \frac{l^2}{I_o}\,; \int_0^l \frac{x^2}{I_x}\,dx = 0{,}91825 \frac{l^3}{I_o}$$

Teremos portanto, de acordo com os valores do quadro 2,

$$K_{h-i,1} = \frac{0{,}31923\ l^3\ EI_o}{0{,}73357\ l \times 0{,}31923\ l^3 - (0{,}44853\ l^2)^2} =$$
$$= 9{,}67 \frac{EI_o}{l}$$

$$\eta_{h-i,1} = \left(\frac{0{,}44853}{0{,}31923} - 1\right) = 0{,}404$$

e dos valores do quadro 3,

$$K_{h-i,2} = \frac{0{,}91825\ l^3\ EI_o}{2{,}44172\ l \times 0{,}91825 - (1{,}32805\ l^2)^2} =$$
$$= 2{,}05 \frac{EI_p}{l}$$

$$\eta_{h-i,2} = \left(\frac{1{,}32805}{0{,}91825} - 1\right) = 0{,}446$$

(*) — J. S. Brazão Farinha "Cálculo de Estruturas Hiperestáticas" Técnica n.º 23, Outubro 1953, pág. 15

Quadro 2 — Cálculo da rigidez de flexão e do coeficiente de transmissão $K_{h-i,1}$; $\eta_{h-i,1}$ da viga de momento de inércia variável

Secções	Abcissas x	Alturas da viga $\frac{b_x}{b}$	Mom. de inércia $I_x\left(\frac{b_x}{b}\right)^3 I_o$	Relações $\frac{1}{I_x}$	$\frac{x}{I}$	$\frac{x^2}{I_x}$
h	0,00	1,70	4,91300 I	0,20354 $\frac{1}{I_o}$	0,00000 $\frac{I}{I_o}$	0,00000 $\frac{I^2}{I_o}$
1	0,05	1,63	4,33075	0,23090	0,01155	0,00058
2	0,10	1,56	3,79642	0,26340	0,02634	0,00263
3	0,15	1,49	3,30795	0,30230	0,04535	0,00680
4	0,20	1,42	2,86329	0,34924	0,06985	0,01397
5	0,25	1,35	2,46038	0,40644	0,10161	0,02540
6	0,30	1,28	2,09715	0,47683	0,14305	0,04292
7	0,35	1,21	1,77156	0,56447	0,19756	0,06915
8	0,40	1,14	1,48154	0,67497	0,26999	0,10800
9	0,45	1,07	1,22504	0,81629	0,36733	0,16530
10	0,50	1,00	1,00000	1,00000	0,50000	0,25000
11	0,55	1,00	1,00000	1,00000	0,55000	0,30250
12	0,60	1,00	1,00000	1,00000	0,60000	0,36000
13	0,65	1,00	1,00000	1,00000	0,65000	0,42250
14	0,70	1,00	1,00000	1,00000	0,70000	0,49000
15	0,75	1,00	1,00000	1,00000	0,75000	0,56250
16	0,80	1,00	1,00000	1,00000	0,80000	0,64000
17	0,85	1,00	1,00000	1,00000	0,85000	0,72250
18	0,90	1,00	1,00000	1,00000	0,90000	0,81000
19	0,95	1,00	1,00000	1,00000	0,95000	0,90250
i	1,00	1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Quadro 3 — Cálculo da rigedez de flexão e do coeficiente de transmissão $K_{h-i,2}$; $\eta_{h-i,2}$, da viga de momento de inércia variável, para a/b = 0,60

Secções	Abcissas	Altura da viga $\frac{b_x}{b}$	Momentos de inércia $I_x\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{b_x}{b}\right)I_o$	Quocientes $\frac{1}{I}$	$\frac{x}{I_x}$	$\frac{x^2}{I_x}$
h	0,00	1,70	0,6120 I_o	1,63399 $\frac{1}{I_o}$	0,00000 $\frac{I}{I_o}$	0,00000 $\frac{I^2}{I_o}$
1	0,05	1,63	0,5868	1,70416	0,08521	0,00426
2	0,10	1,56	0,5616	1,78063	0,17806	0,01781
3	0,15	1,49	0,5364	1,86428	0,27964	0,04195
4	0,20	1,42	0,5112	1,95618	0,39124	0,07825
5	0,25	1,35	0,4860	2,05761	0,51440	0,12860
6	0,30	1,28	0,4608	2,17014	0,65104	0,19531
7	0,35	1,21	0,4356	2,29568	0,80349	0,28122
8	0,40	1,14	0,4104	2,43665	0,97466	0,38986
9	0,45	1,07	0,3852	2,59605	1,16822	0,52570
10	0,50	1,00	0,3600	2,77778	1,38889	0,69444
11	0,55	1,00	0,3600	2,77778	1,52778	0,84028
12	0,60	1,00	0,3600	2,77778	1,66667	1,00000
13	0,65	1,00	0,3600	2,77778	1,80556	1,17361
14	0,70	1,00	0,3600	2,77778	1,94444	1,36111
15	0,75	1,00	0,3600	2,77778	2,08333	1,56250
16	0,80	1,00	0,3600	2,77778	2,22222	1,77778
17	0,85	1,00	0,3600	2,77778	2,36111	2,00694
18	0,90	1,00	0,3600	2,77778	2,50000	2,25000
19	0,95	1,00	0,3600	2,77778	2,63889	2,50694
i	1,00	1,00	0,3600	2,77778	2,77778	2,77778

Notemos que estes valores não dependem da relação $\frac{a}{b}$ por ser uma constante que não afecta o valor das fracções que dão K e η.

De modo análogo ao anteriormente indicado, a aplicação do momento flector $K_{i-h,l}$ na extremidade i, de modo que faça rodar o apoio i da rotação $\theta_i = 1$ conduz ao sistema de equações

$$\left| \begin{array}{l} K_{i-h,l} \int_0^l \frac{dx}{I_x} + R_{i-h,l} \int_0^l \frac{l-x}{I_x} dx = E \\ K_{i-h,l} \int_0^l \frac{l-x}{I_x} dx + R_{i-h,l} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{I_x} dx = 0 \end{array} \right.$$

donde se deduz

$$\left| \begin{array}{l} K_{i-h,l} = \dfrac{E \int_0^l \frac{(l-x)^2}{I_x} dx}{\int_0^l \frac{dx}{I_x} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{I_x} dx - \left(\int_0^l \frac{l-x}{I_x} dx \right)^2} \\ \eta_{i-h,l} = \dfrac{\int_0^l \frac{(l-x)}{I_x} dx}{\int_0^l \frac{(l-x)^2}{I_x} dx} - 1 \end{array} \right.$$

Teremos pois, de acordo com o quadro 2

$$\int_0^l \frac{(l-x)^2}{I_x} dx = l \int_0^l \frac{1}{I_x} dx + \int_0^l \frac{x^2}{I_x} dx - 2\, l \times$$

$$\times \int_0^l \frac{x}{I_x} dx = 0{,}15574 \frac{l^3}{I_o}$$

$$\int_0^l \frac{l-x}{I_x} dx = l \int_0^l \frac{1}{I_x} dx - \int_0^l \frac{x}{I_x} dx =$$

$$= 0{,}28504 \frac{l^2}{I_o}$$

e portanto

$$K_{i-h,l} = \frac{0{,}15574}{0{,}73357 \times 0{,}15574 - 0{,}28504^2} \frac{EI_o}{l} =$$

$$= 4{,}71 \frac{EI_o}{l}$$

$$\eta_{i-h,l} = \frac{0{,}28504}{0{,}15574} - 1 = 0{,}830$$

De modo análogo, será, na conformidade com o quadro 3,

$$\int_0^l \frac{(l-x)^2}{I_x} dx = (2{,}44172 + 0{,}91825 - 2 \times 1{,}32805) \times$$

$$\times \frac{l^3}{I_o} = 0{,}70387 \frac{l^3}{I_o}$$

$$\int_0^l \frac{l-x}{I_x} dx = (2{,}44172 - 1{,}32805) \frac{l^2}{I_o} = 1{,}11367 \frac{l^2}{I_o}$$

$$K_{i-h,2} = \frac{0{,}707387}{2{,}44172 \times 0{,}70387 - 1{,}11367^2} \frac{EI_o}{l} = 1{,}47 \frac{EI_o}{l}$$

$$\eta_{i-h,2} = \frac{1{,}11367}{0{,}70387} - 1 = 0{,}582$$

A aplicação do momento de torção $K_{h-i,3}$ à extremidade h da barra h−i, instala um momento constante ao longo do vão, (donde se conclue que o coeficiente de transmissão continua a ser −1 nas vigas de momento de inércia variável), e significa também que a rigidez de torção da viga é dada por

$$K_{h-i,3} = K_{i-h,3} = \frac{G}{\int_0^l \frac{dx}{I_t}}, \text{ em que } I_t =$$

$$= k\, I_o, \text{ sendo } k = 4 \left(\frac{a}{b_x} \right)^2 \left[1 - 0{,}630 \left(\frac{a}{b} \right) + \right.$$

$$\left. + 0{,}052 \left(\frac{a}{b_x} \right)^5 \right] \left(\frac{b_x}{b} \right)^5$$

portanto dependente das dimensões a, b da viga. Na hipotese de ser a = 30 cm, b = 50 cm (quadro 4), conforme fig. 3, será:

$$\int_0^l \frac{dx}{I_t} = \frac{0{,}05\, l}{3} \Big[0{,}52510 + 1{,}10925 + 2\,(0{,}58717 +$$

$$+ 0{,}66581 + 0{,}76861 + 0{,}90849 + 5 \times 1{,}10925) +$$

$$+ 4\,(0{,}55441 + 0{,}62404 + 0{,}71355 + 0{,}83278 +$$

$$+ 0{,}99907 + 5 \times 1{,}10925) \Big] \frac{1}{I_o} = \frac{0{,}05\, l}{3} \times$$

$$\times 55{,}66741 \frac{l}{I_o} = 0{,}92779 \frac{l}{I_o}$$

$$K_{h-i,3} = K_{i-h,3} = \frac{1{,}078\, GI_o}{l}$$

Quadro 4 — Cálculo da rigidez de torção $K_{h-i,3}$ da viga de momento de inércia variável, para $a = 30$ cm ; $b = 50$ cm

Secções	Abcissas	Altura da viga b (cm)	I_t	$\frac{1}{I_t}$
h	0,00 l	85,0	1,90437 I_0	0,52510 $\frac{1}{I_0}$
1	0,05	81,5	1,80370	0,55441
2	0,10	78,0	1,70306	0,58717
3	0,15	74,5	1,60246	0,62404
4	0,20	71,0	1,50191	0,66581
5	0,25	67,5	1,40143	0,71355
6	0,30	64,0	1,30104	0,76861
7	0,35	60,5	1,20079	0,83278
8	0,40	57,0	1,10072	0,90849
9	0,45	53,5	1,00092	0,99907
10	0,50	50,0	0,90150 I_0	1,10925 $\frac{1}{I_0}$
11	0,55	50,0	0,90150	1,10925
12	0,60	50,0	0,90150	1,10925
13	0,65	50,0	0,90150	1,10925
14	0,70	50,0	0,90150	1,10925
15	0,75	50,0	0,90150	1,10925
16	0,80	50,0	0,90150	1,10925
17	0,85	50,0	0,90150	1,10925
18	0,90	50,0	0,90150	1,10925
19	0,95	50,0	0,90150	1,10925
i	1,00 l	50,0	0,90150 I_0	1,10925 $\frac{1}{I_0}$

No caso da viga da altura constante 50 cm em todo o seu comprimento, teriamos um valor pouco diferente do anterior

$$K_{h-i,3} = K_{i-h,3} \frac{0{,}902\ GI_0}{l}$$

1.3 — Módulo de elasticidade G

O módulo de elasticidade transversal G pode exprimir-so em função do módulo de elasticidade longitudinal E pelas relações

$$G = \frac{nE}{2\,(n+1)} \qquad G = \frac{E}{2\,(\nu+1)}$$

em que n é o módulo de Poisson e $\nu = \frac{1}{n}$ o coeficiente de Poisson.

De acordo com o anexo I do REBA, para o betão armado $\nu = 0{,}20$ donde $E = 2{,}40$ G. Para a construção metálica toma-se, em regra, $\nu = 0{,}25$, donde $E = 2{,}50$ G.

1.4 — Barras articuladas num dos apoios

Indicamos atrás os valores das rigidezes das barras de eixo rectilíneo e momento de inércia constante en-

castrada nos apoios. Há todavia a referir que, no caso das barras encastradas na extremidade i e articuladas à torção e à flexão, respectivamente, no outro extremo j, as regidezes são expressas por

$$K_{i-j,1} = \frac{3\,EI_1}{l}\ ;\ K_{i-j,2} = \frac{3\,EI_2}{l}\ ;\ K_{i-j,3} = 0$$

Neste caso os coeficientes de transmissão da extremidade i da barra para a extremidade j são nulos, $\eta_f = \eta_t = 0$.

Notemos que uma barra pode, independentemente, ser articulada numa das extremidades à flexão (ou torção) e ser nela encastrada à torção (ou flexão), havendo que proceder em conformidade.

Com efeito, uma viga rígida pode ser encastrada à flexão (mas não à torção) por uma parede esbelta disposta no seu plano, conforme fig. 4 a). Analogamente em relação à fig. 4 b) quanto à possibilidade de encastramento à torção, e não à flexão.

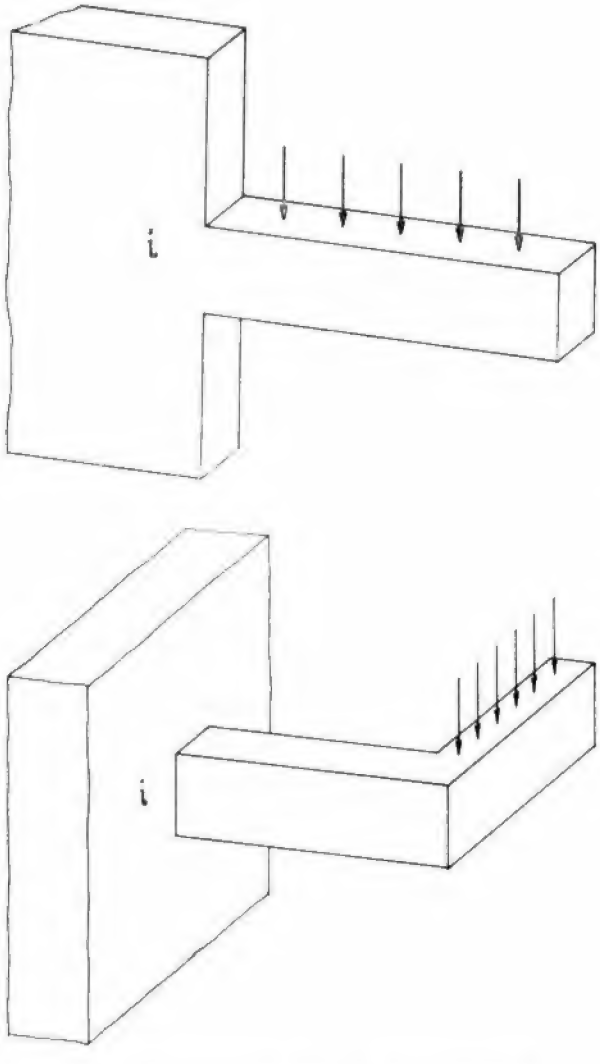


Fig. 4 — Encastramento em i, à flexão e à torção

1.5 — Casos de simetria

Há ainda que considerar os casos de possível simplificação dos cálculos, por razões de simetria, uma vez que então se pode considerar uma parte apenas (metade ou um quarto da estrutura) como se o restante não existisse. Para as barras cortadas tomam-se então rigidezes virtuais K

No caso de uma estrutura simétrica cujo plano de simetria corta pelo meio uma ou mais barras, de tal modo que a estrutura se comporta como perfeitamente encastrada (ou como articulada) na secção média, tomam-se nas barras cortadas rigidezes virtuais à flexão $K_v = 0{,}5$ Kf e $K_v = 1{,}5$ Kf respectivamente no caso de actuação de solicitações simétricas ou anti-simétricas, ver fig. 5. Para as rigidezes de torção teremos, também respectivamente, $K_{vt} = 0$; $K_{vt} = 2$ Kt.

No caso do plano de simetria da estrutura passar por um ou mais nós, de tal modo que as barras que coincidem com o referido plano não podem ter rotação, consideram-se perfeitamente encastradas as barras cujas extremidades se inserem no plano de simetria.

Pelo contrário, nas barras que se situam no plano de simetria e que podem rodar, e são divididas em duas metades longitudinais, toma-se em cada metade das barras, metade das cargas actuantes, e uma rigidez virtual de cada uma das partes igual a metade da real. Isto porque a cada uma das metades das barras cortadas correspondem metade dso esforços totais nela instalados. No final, portanto, terá que se multiplicar por 2 todos os valores encastradas para as meias barras.

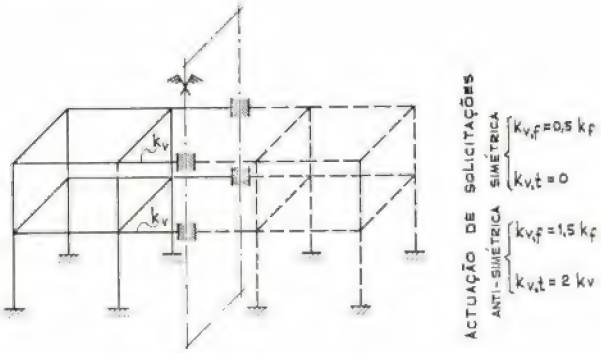
2 — Fundamentos do método

A aplicação do método de Cross a uma estrutura no espaço parte da situação de encastramento perfeito, isto é, da aplicação, em todos os nós, dos momentos de encastramento perfeito M que respeitam as cargas aplicadas nas diversas barras.

A libertação de um qualquer nó "i", corresponde à aplicação de um momento de sentido contrário ao aplicado nesse nó, isto é, $-M^e$, uma vez que em cada nó equilibrado $\Sigma M = 0$. O momento $-\Sigma M^e$ distribui-se pelas diversas barras que concorrem no nó i, de uma maneira que depende do valor das componentes $\theta_{x,i}$; $\theta_{y,i}$; $\theta_{z,i}$ da rotação do referido nó. Os valores destas são dados pelo "sistema característico" de cada nó da estrutura, a seguir indicado para o nó i, e no qual os somatórios se estendem a todas as diversas barras que concorrem no referido nó.

$$1)\quad \left|\begin{array}{l} \theta_{x,i}\,\Sigma K \cos^2\alpha + \theta_{y,i}\,\Sigma K \cos\alpha\cos\beta + \\ + \theta_{z,i}\,\Sigma K \cos\alpha\cos\gamma + M_{x,i} = 0 \\ \theta_{x,i}\,\Sigma K \cos\alpha\cos\beta + \theta_{y,i}\,\Sigma K \cos^2\beta + \\ + \theta_{z,i}\,K\,\Sigma \cos\beta\cos\gamma + M_{y,i} = 0 \\ \theta_{x,i}\,\Sigma K \cos\alpha\cos\gamma\,\theta_{y,i} + \cos\beta\cos\gamma + \\ + \theta_{z,i}\,\Sigma K \cos^2\gamma + M_{z,i} = 0 \end{array}\right.$$

a) O plano de simetria corta as barras transversalmente pelo meio



b) O plano de simetria corta as barras longitudinalmente pelo meio

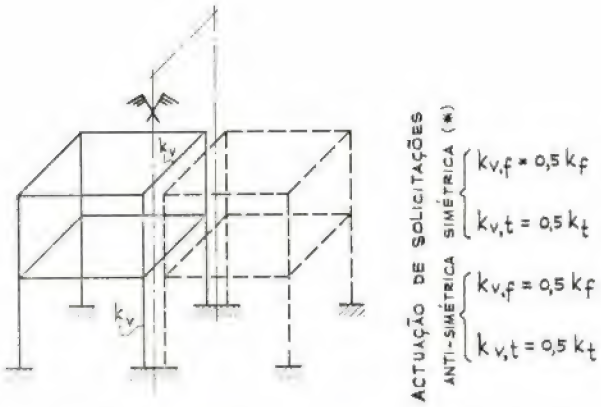


Fig. 5 — Simplificações por vritude da simetria da estruturas (barras de secção constante)

Nestes sistemas de equações, $K_{i\ h,1}, K_{i-h,2}, K_{h-i,3}$, representam as rigidezes, referidas aos eixos 1 2, 3 da barra i-h, uma das barras que concorre em i. Além desta barra, há a considerar todas as outras i-j; i-k etc. a que pretence o nó i.

Analogamente, $\alpha_{i-h,1}, \alpha_{i-h,2}, \alpha_{i-h,3}$, etc. representam os ângulos que os três eixos da secção da barra i-h fazem com o eixo dos χ e de modo análogo $\beta_{i-h,1}$, $\beta_{i-h,2}$, $\beta_{i-h,3}$ (com o eixo dos j) e $\gamma_{1-h,1}$, $\gamma_{i-h,2}$, $\gamma_{1-h,3}$, (com o eixo dos z). Além desta barra há que considerar todas as outras barras a que pertence o nó i.

Finalmente, $M_{x,i}$, $M_{j,i}$, $M_{z,i}$ são as componentes da resultante dos momentos aplicados ao nó i, segundo os eixos x, y, z, entrando com todos os momentos aplicados a cada uma das barras que concorem nesse nó.

Conhecidos os valores de θ^1 para o nó i) sistema de equações 1) as componentes M^r dos momentos desiquilibrados (numa 1.ª distribuição) e que se aplicam na extremidade i da barra i-h, serão obtidos através das expressões

$$
2)\quad \left|
\begin{aligned}
M^r_{i-h,1} &= K_{i-h,1}\Big[\theta^1_{x,i}\cos\alpha_{i-h,1} + \theta^1_{y,1} \times \\
&\qquad \times \cos\beta_{i-h,1}\,\theta^1_{z,i}\cos\gamma_{i-h,1}\Big] \\
M^r_{i-h,2} &= K_{i-h,2}\Big[\theta^1_{x\,i}\cos\alpha_{i-h,2} + \theta^1_{y,i} \times \\
&\qquad \times \cos\beta_{i-h,2} + \theta^1_{z,i}\cos\gamma_{i-h,2}\Big] \\
M^r_{i-h,3} &= K_{i-h,3}\Big[\theta^1_{x,i}\cos\alpha_{i-h,3} + \theta^1_{y,i} \times \\
&\qquad \times \cos\beta_{i-h,3} + \theta^1_{z,i}\cos\gamma_{i-h,3}\Big]
\end{aligned}
\right.
$$

Destas componentes, transmitem-se para a outra extremidade h da barra i-h os valores

$$\eta_{i-h,1}\,M^r_{i-h,1}\ ;\ \eta_{i-h,2}\,M^r_{i-h,2}\,M^r_{i-h,3}$$

Do mesmo modo, para as restantes barras que concorrem no nó i. O indicado repete-se com valores θ^2, θ^3 etc. até que as correcções introduzidas sejam consideradas desprezaveis, como é correntemente praticado nas estruturas planas.

Em cada libertação de um nó i, há, pois, que resolver um sistema de equação (1) e depois temos de aplicar as expressões (2) para cada uma das barras que concorrem no referido nó i, afim de determinar as componentes dos momentos desiquilibrados (segundo os eixos 1, 2, 3, de cada barra). Depois, em todas as barras, uma transmissão de momentos para a extremidade oposta a i.

No caso de uma estrutura de barras ortogonais entre si, escolhendo um sistema x, y, z de referência do nó em coincidência com os eixos das duas ou três barras que nele concorrem, é sempre $\Sigma K \cos\alpha \cos\beta = \Sigma K \cos\alpha \cos\gamma = \Sigma K \cos\beta \cos\gamma = 0$ donde resulta que o sistema (1) se transforma no sistema (3) com a solução (3') imediata.

$$
3)\quad \left|
\begin{aligned}
\theta_{x,i}\,\Sigma K \cos^2\alpha + M_{x,i} &= 0 \\
\theta_{y,i}\,\Sigma K \cos^2\beta + M_{y,i} &= 0 \\
\theta_{z,i}\,\Sigma K \cos^2\gamma + M_{z,i} &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

(*) Se, neste caso, não actuarem forças nas barras cortadas longitudinalmente, consideram-se as barras perpendiculares a estas encastradas nas extremidades, e como se aquelas não existissem. Ver exemplo 4.º para esclarecimento.

$$3')\quad \left|\begin{array}{l} \theta_{x,i} = -\dfrac{M_{x,i}}{\Sigma\, K \cos^2 \alpha} \\[2ex] \theta_{y,i} = -\dfrac{M_{y,i}}{\Sigma\, K \cos^2 \beta} \\[2ex] \theta_{z,i} = -\dfrac{M_{z,i}}{\Sigma\, K \cos^2 \gamma} \end{array}\right.$$

Notando que para o caso de barras perpendiculares o valor de $\cos^2$ é sempre igual a 1 (ou a 0) deduz-se imediatamente, por substituição destes valores do sistema 2), que para este tipo de estruturas é generalizável o método de Cross nos termos em que é correntemente aplicado nos sistemas planos. Só temos, como já atraz dissemos, que considerar para cada barra a rigidez de flexão ou de torção, consoante o momento desiquilibrado é de flexão (e portanto de flexão ou torção para a barra perpendicular, conforme se trata de barras complanas ou existentes em planos perpendiculares entre si). Ou então o momento desiquilibrado é de torção para uma dada barra, e de flexão para as que lhe são perpendiculares.

3 — Exemplos de aplicação no caso de estruturas de barras perpendiculares entre si

Exemplo 1.º — Determinar os esforços actuantes na estrutura constituída por duas vigas simetricamente cruzadas, de betão armado e secção constante, e que apoiam uma laje na qual actua a carga uniformemente distribuida g (kg/m²), conforme fig. 6.

A resolução do problema é considerada em duas etapas, na 1.ª flexão nas barras h-i; i-h'; j-j; i-j' com o nó central i fixo, quanto a deslocamentos na vertical. De acordo cm a fig. 7 o nó i está em equilibrio, (momentos M_i iguais nos dois sentidos) não actuando portanto momentos de torção, dada a simetria da estrutura.

Na 2.ª etapa considera-se o deslocamento Δ, na vertical, do nó i, que dá lugar a momentos M'_i também equilibrados.

Não há portanto que fazer qualquer distribuição de momentos.

O valor de Δ (flecha elastica em i) determina-se pela condição $\Sigma V = 0$ de equilibrio do nó i.

$$T_i = -\left[\frac{1}{4}\, p\, \frac{l}{2} + \frac{5}{92}\, pl\right] = -\frac{33}{184}\, pl$$

$$T'_i = +\frac{24EI}{l^3}\,\Delta\ ;\ 4\left[\frac{24EI}{l^3}\,\Delta - \frac{33}{184}\, pl\right] = 0$$

$$\Delta = \frac{11\, pl^4}{1472EI}$$

Os momentos flectores actuantes em i serão

$$M = \left(\frac{33}{368} - \frac{2{,}5}{92}\right) pl^2 = \frac{pl^2}{16} = \frac{gl^3}{32}$$

nos dois sentidos, isto é, nas duas vigas que em i se cruzam.

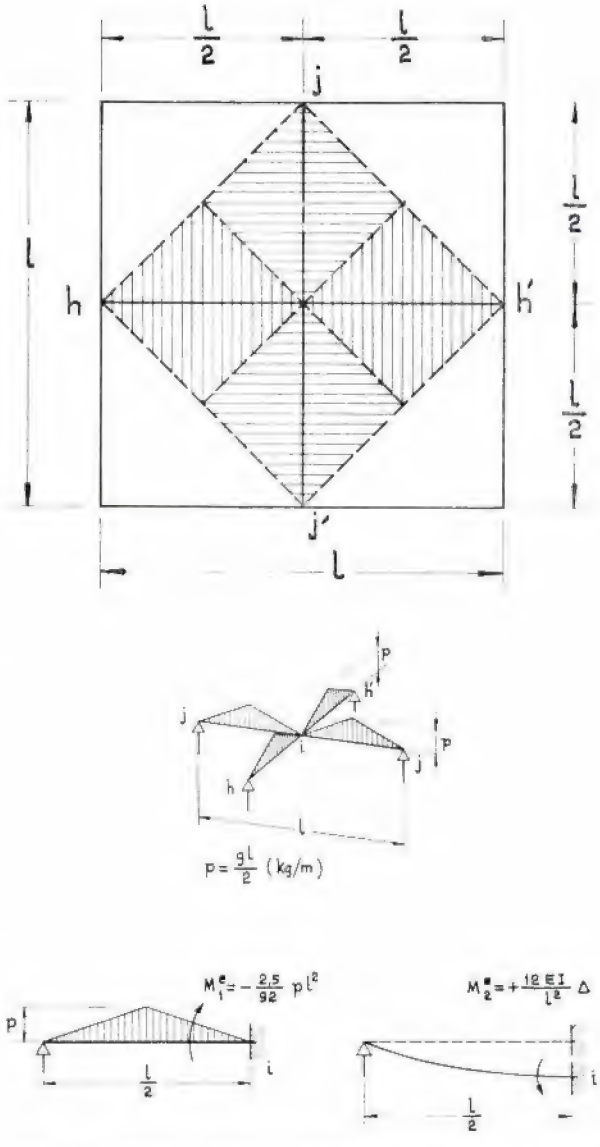


Fig. 6 — Estrutura simétrica, constituída por duas vigas cruzadas de igual vão, que sustentam uma laje de betão armado

Exemplo 2.º — Determinar os momentos no pórtico indicado na fig. 8, no caso de actuar, normalmente ao plano da estrutura, uma carga uniformemente distribuída (vento) de 200 kg/m2. Considerar E= 2,50 G e as secções transversais das barras, rectangulares de largura constante 0,30 m.

Teremos nos montantes g = 200 × 0,5 = 100 kg/m e na travessa g' = 200 × 0,72 = 144 kg/m.

O problema é resolvido em duas etapas, considerando na primeira a rotação dos nó, sem deslocamentos

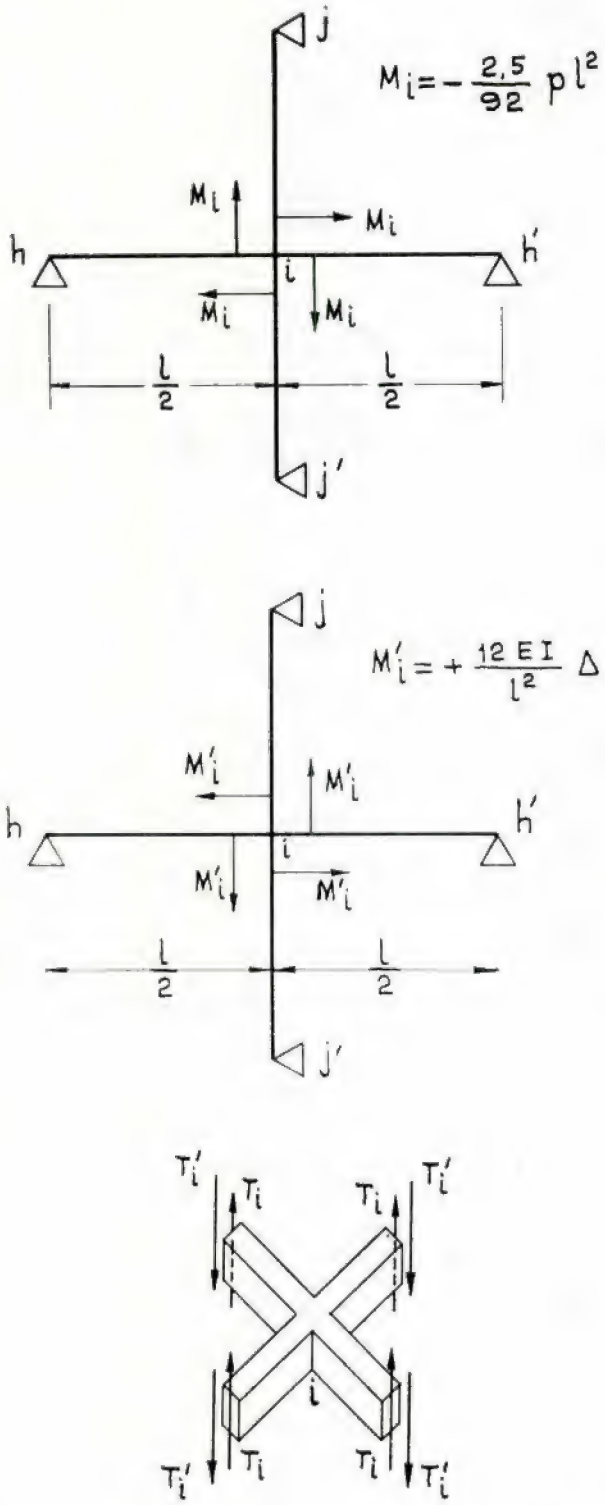


Fig. 7 — Representação dos esforços que actuam no nó i da estrutura do 1.º exemplo

no sentido perpendicular ao plano da estrutura, e considerando na segunda, etapa o deslocamento Δ dos nós i e j, no sentido perpendicular ao plano do pórtico.

Os momentos de encastramento perfeito correspondentes serão

nos montantes

$$\begin{cases} M^e = \dfrac{100 \times 5,0^2}{12} = 208,3 \text{ kgm para a carga} \\[2ex] M^e = \dfrac{6EI}{5,0^2}\Delta = 0,24 \text{ EI } \Delta \text{ para o deslocamento} \end{cases}$$

na travessa

$$\begin{cases} M^e = \dfrac{144 \times 10,0^2}{12} = 1.200 \text{ kgm para a carga} \\[2ex] M^e = \text{o para o deslocamento } \Delta\text{, por razão de simetria} \end{cases}$$

Por esta mesma simetria tomamos metade da estrutura e adoptamos para rigidezes da barra i—j ($I_1 = \frac{72 \times 30^3}{12} = 162.000$ cm3; $I_2 = \frac{30 \times 72^3}{12} = 933.120$ cm4),

rigidez de flexão

$$\begin{cases} K_{i-j,1} = \dfrac{2\ E}{1.000} \times 162.000 = 324\ E \\[2ex] K_{i-j,2} = \dfrac{2\ E}{1.000} \times 933.120 = 1.866\ E \end{cases}$$

rigidez de torção $K_{i-j,3} = 0$

Para a barra i-h ($I_1 = \frac{30 \times 50^3}{12} = 112.500$ cm4; $I_2 = \frac{50 \times 30^3}{12} = 312.500$ cm4; $I_3 = 2,50\ I_1 = 281.250$ cm4), será

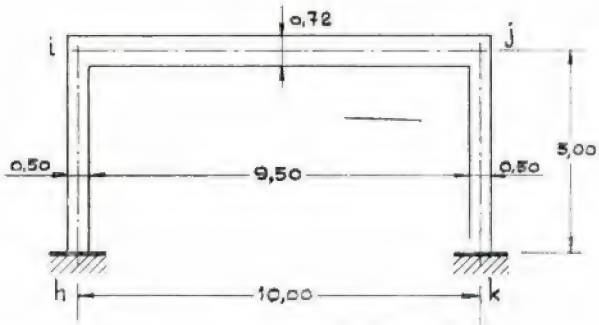
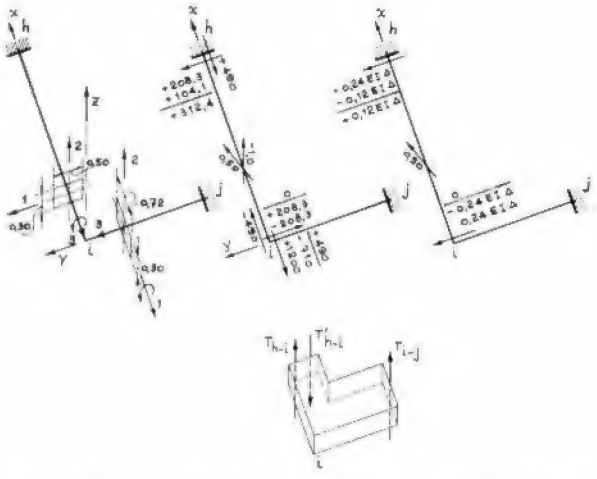


Fig. 8 — Estrutura do 2.º exemplo



Fg. 9 — Sistemas de eixos de referencia e distribuição dos momentos correspondente ao 2.º exemplo

rigidez de flexão

$$K_{i-h,1} = \frac{4\ E}{500} \times 112.500 = 900\ E$$

$$K_{i-h,2} = \frac{4\ E}{500} \times 312.500 = 2.500\ E$$

rigidez de torção $K_{i-h,3} = \frac{GI_t}{500} =$

$$= \frac{2,5 \times 112.500\ E}{2,5 \times 500} = 225\ E$$

Escolhemos os eixos de referência x, y em coincidência com os eixos das barras da estrutura, e o eixo z perpendicular ao plano desta, fig. 9.

Para a 1.ª etapa teremos no nó i aplicados os momentos $M_x = -1200$ (*), $M_y = -208,3$; $M_z = o$. De acordo com 3' será

$$\theta_{xi} = -M_{xi} = -\frac{M_{xi}}{\Sigma\ K\ \cos^2 \alpha} = +\frac{1.200}{549}$$

$$\theta_y = -\frac{M_{yi}}{w\ K\ \cos^2 \beta} = \frac{208,3}{900}$$

$$\theta_{zi} = -\frac{M_{zi}}{w\ K\ \cos^2 \gamma} = 0$$

Os momentos de distribuição a aplicar na barra h—i são, no vértice i (quadro 5)

Quadro 5 — Valores característicos do nó i (2.º exemplo). Eixos de referencia da fig. 9.

Barras		i—h			i — j			Σ
Eixos		1	2	3	1	2	3	
cos α		0	0	−1	−1	0	0	—
cos β		1	0	0	0	0	1	—
cos γ		0	1	0	0	1	0	—
K		900	2.500	225	324	1.866	0	
K cos² α		0	0	225	324	0	0	549
K cos² β		900	0	0	0	0	0	900
K cos² γ		0	2.500	0	0	1.866	1	4366
1.ª etapa	M_x	—			− 1.200			− 1.200
	M_y	− 208,3			—			− 208,3
2.ª etapa	M_x	—			—			—
	M_y	+ 0,24EI Δ			—			+ 0,24EI Δ

$$M^r_{i-h,1} = 900 \times \frac{208,3}{900} = 208,3 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-h,3} = -225 \times \frac{1.200}{549} = -490 \text{ kgm}$$

e no vértice h os momentos transmitidos, ou seja estes valores multiplicados pelos respectivos coeficientes de transmissão, 0,5 no 1.º caso por se tratar de flexão (eixo 1) e − 1,0 no 2.º caso por se tratar de torção (eixo 3).

(Continua)

(*) Notemos que dada a orientação dos eixos da referencia, este momento pode exprimir-se por duas maneiras, $M_x = -1200$ ou $M_{i-j,1} = +1200$ hgm

ventilação industrial

EFACEC

EFACEC

Estudo, projecto e realização de:

- VENTILAÇÃO GERAL
- DESPOEIRAMENTO
- TRANSPORTE PNEUMÁTICO
- CONDICIONAMENTO DE AR
- AQUECIMENTO
- SECAGEM

Topografia Geral

2.º VOLUME

Pelo Engenheiro

A. C. XEREZ

Preço de cada volume

180$00

•

Desconto: 10% aos assinantes

Pedidos à Técnica

FUNDAÇÕES ESPECIAIS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CAPTAÇÕES DE ÁGUA

Sopecate

ESPECIALISTA DESDE 1947

R. DO ARSENAL, 146 - 2.º
Telf. 320208 - 364010 - 360437
LISBOA - 2

Já pensou...

... que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

técnica REVISTA DE ENGENHARIA

Avenida Rovisco Pais - Lisboa 1 - Telef. 73 15 49

C. D. U. 532.54

Limite superior do número de Froude em canais prismáticos e escoamento uniforme

ANTÓNIO BETÂMIO DE ALMEIDA

SUMÁRIO

O autor estuda a variação do número de Froude em canais prismáticos e escoamento uniforme e a possibilidade de o mesmo admitir um limite superior. Apresentam-se, igualmente, algumas aplicações numéricas.

SUMMARY

The author studies Froude number range in prismatic channels and uniform flow and the possibility of an upper bound for it. Numerical aplications are also shown.

1 — INTRODUÇÃO

O número de Froude é um parâmetro importante na caracterização dos escoamentos em superfície livre de fluidos incompressíveis. A variação do referido parâmetro está dependente do andamento das curvas de declive crítico em função da altura crítica. Em determinadas circunstâncias, o número de Froude apresenta um limite superior cuja expressão se deduz no presente estudo o qual se refere a canais prismáticos de leito fixo e a fluidos incompressíveis monofásicos, em escoamento uniforme.

2 — NÚMERO DE FROUDE EM ESCOAMENTO UNIFORME

2.1 — Secção rectangular

No caso de escoamento em canais com secção rectangular, o número de Froude é definido [1] pela seguinte expressão

$$F = \frac{U}{\sqrt{g h_u \frac{\lambda}{\alpha}}} \qquad (1)$$

a qual, se transforma, no caso muito corrente de se poder considerar $\lambda = \alpha = 1$, na conhecida expressão

$$F = \frac{U}{\sqrt{g \; h_u}} \qquad (2)$$

No escoamento uniforme, a altura poderá ser igual, menor ou maior do que a altura crítica, consoante o declive do canal for, respectivamente, igual, superior ou inferior ao declive crítico. Num canal com determinado declive, largura e rugosidade o regime de escoamento uniforme poderá depender do caudal escoado e da fórmula de resistência utilizada. No caso do escoamento ser puramente turbulento, as leis de resistência mais frequentemente utilizadas [2] [3] são as que se indicam no Quadro 1.

QUADRO 1

LEI	*DESIGNAÇÃO*	*EQUAÇÃO*
1	Chézy	$U = C_1 \sqrt{R\ i}$
2	Chézy	$U = C \sqrt{R\ i}$
3	Gauckler - Manning	$U = K\ R^{2/3}\ i^{1/2}$
4	Karman - Prandtl	$U = 5.6 \log \frac{14.8\ R}{e} \sqrt{g\ R\ i}$

A aplicação das leis apresentadas conduz às expressões para o declive crítico que se mostram no Quadro 2. O declive crítico é função do caudal por intermédio da altura crítica, através da seguinte expressão que minimiza a correspondente à da energia específica:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2\ g}} \qquad (3)$$

Sempre que, para um determinado caudal, o valor i_c é inferior a i, o escoamento uniforme é rápido e o correspondente número de Froude superior à unidade.

Na figura 1 apresentam-se as configurações da função i_c nos casos 1, 2 e 3. Nas figuras 2 e 3, relativas aos casos 4, 5 e 6, os valores de i_c são apresentados em função de h_c e do parâmetro B, para um canal com secção rectangular para o qual se utilizou o valor K = 70 a que corresponde o valor de e = 2.6 mm fornecido pela expressão

$$e = \left(\frac{26}{K}\right)^6 \qquad (4)$$

citada em [2]. A lei 2 comporta-se dum modo análogo ao da lei 3 sendo, contudo, a equivalência entre os parâmetros da rugosidade dependentes da altura h_u.

O traçado das curvas foi efectuado automaticamente mediante um programa escrito em linguagem BASIC para um computador H. P. 9830 - A, munido de «plotter».

Das figuras podem-se extrair algumas considerações importantes, a saber:

QUADRO 2

Caso	*Lei*	*Secção rectangular*	*Declive crítico*	*Figura*
1	1	Largura infinita (caso de Bresse)	$\frac{g}{C_1^2}$	1
2	1	Largura finita B	$\frac{g}{C_1^2}\left(1 + 2\frac{h_c}{B}\right)$	1
3	3	Largura infinita	$\frac{g}{K^2}\left(\frac{1}{h_c}\right)^{1/3}$	1
4	3	Largura finita B	$\frac{g}{K^2}\left(1 + 2\frac{h_c}{B}\right)^{4/3}\left(\frac{1}{h_c}\right)^{1/3}$	2
5	4	Largura infinita	$\frac{1}{32}\log^{-2}\left(14.8\frac{h_c}{e}\right)$	3
6	4	Largura finita B	$\frac{1}{32}\log^{-2}\left(\frac{14.8}{e}\frac{h_c}{1+2\frac{h_c}{B}}\right)\left(1+2\frac{h_c}{B}\right)$	3

NOTA — O valor 14.8, nos casos 5 e 6, foi obtida sem terem conta a correcção proposta por De Marchi [2].

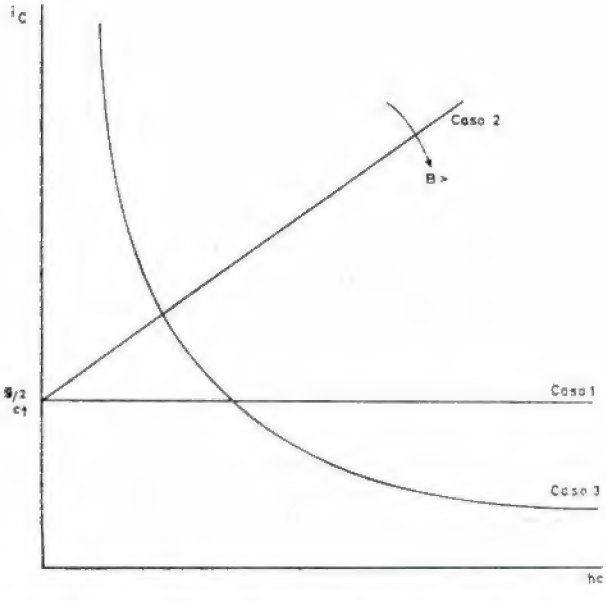


Figura 1 — Andamento das curvas $i = i_c$ (hc) nos casos 1, 2 e 3.

— No caso 1, o tipo do regime uniforme fica definido independentemente do caudal escoado.

— No caso 2, o tipo de regime varia consoante o caudal. Verifica-se a existência de um declive mínimo (g/c_1^2) abaixo do qual o regime é sempre lento. Para declives superiores o regime começa por ser rápido, tornando-se lento em virtude de aumento do caudal.

— Nos casos 4 e 6 verifica-se a existência de um valor mínimo i_{cM} do declive crítico para um determinado intervalo de B. Num dado canal (secção, rugosidade e declive constante), o regime do escoamento uniforme vai variando consoante o caudal (figura 4).
Para $Q < Qi$ o regime é lento ($F < 1$), para Q entre Qi e Qs o regime é rápido ($F > 1$), para $Q > Qs$ o regime é lento ($F < 1$) e para $Q = Qi$ ou $Q = Qs$ o regime é crítico ($F = 1$).

— Quando a largura tende para infinito, tende-se para os casos 3 e 5, verificando-se que Qs tende, igualmente, para infinito (figura 4).

— Existem diferenças entre os valores de i fornecidos pelas leis 3 e 4 (figuras 2 e 3) as quais, deverão

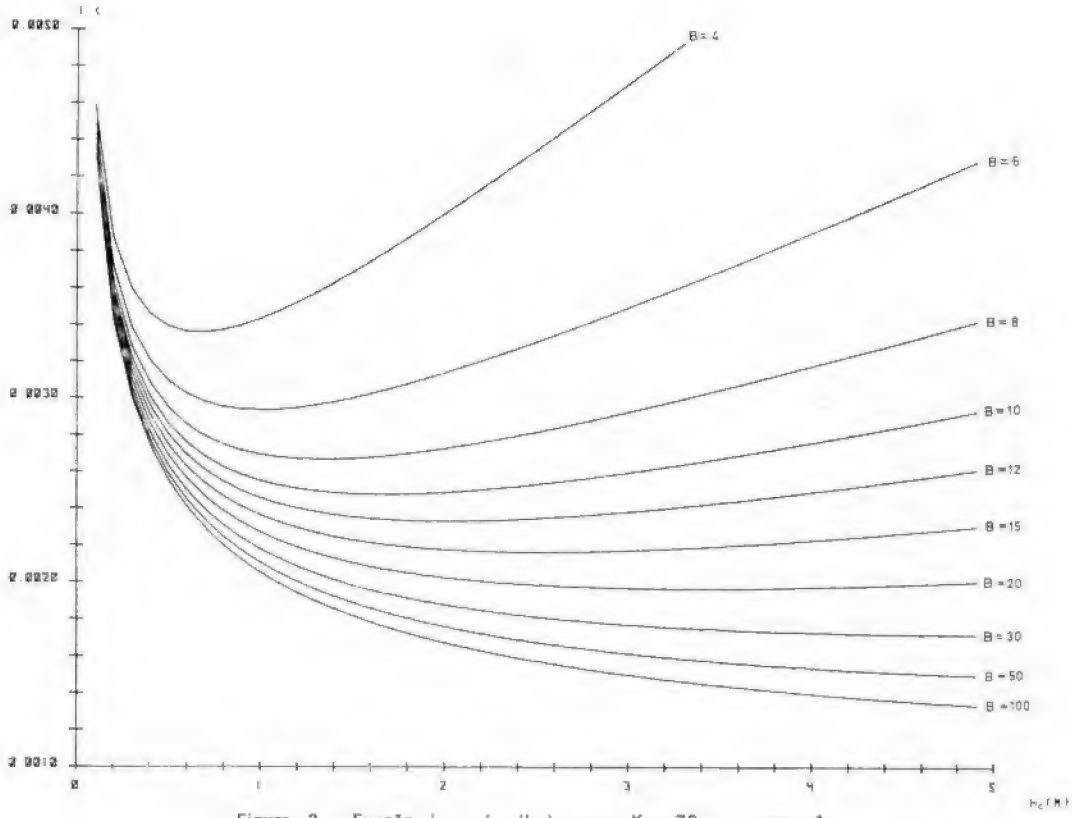


Figura 2 — Função $i_c = i_c\ (h_c)$, para $K = 70$, no caso 4.

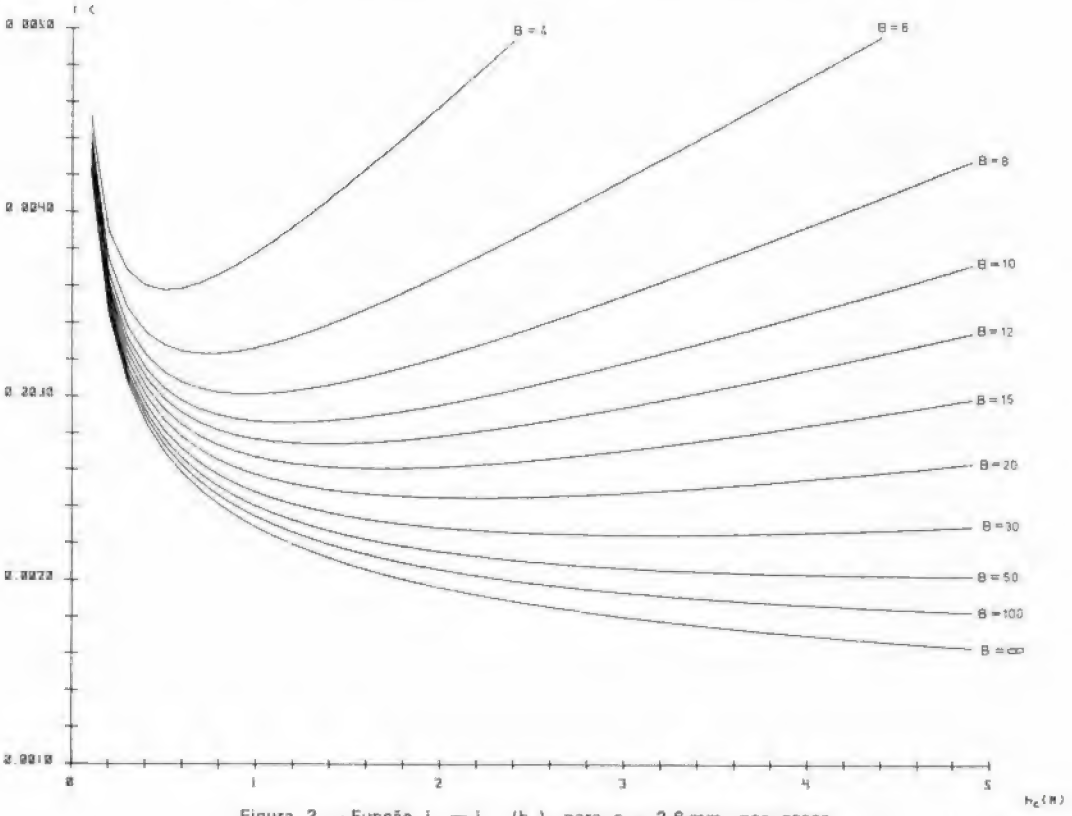


Figura 3 — Função $i_c = i_c\ (h_c)$, para $e = 2.6$ mm, nos casos 5 e 6

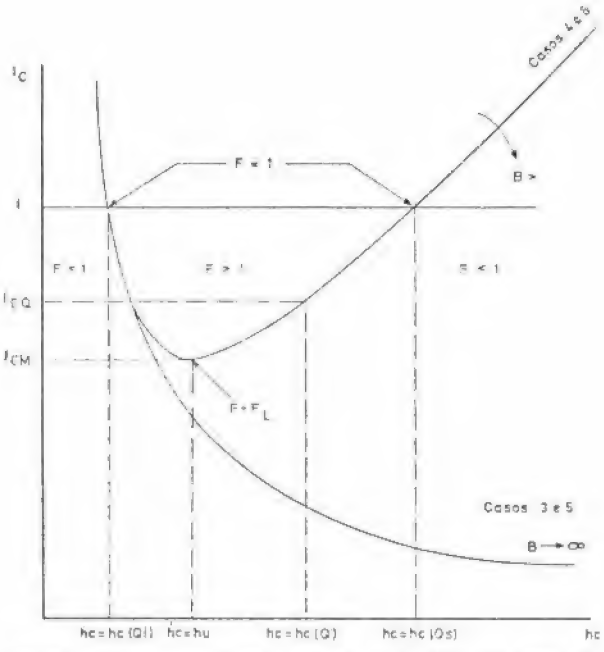


Figura 4 — Andamento das curvas $i_c = i_c$ (hc) nos casos 3, 4, 5 e 6.

ser tomadas em consideração quando se adopta um coeficiente de segurança.

— A aplicação da lei 1 não é de aconselhar em virtude da facilidade de utilização das leis 3 e 4, sobretudo com as actuais mini-calculadoras electrónicas.

2.2 — Secção não rectangular

Para canais com secção não rectangular a expressão do número de Froude é semelhante às indicadas em (1) e (2) com a diferença de se utilizar h_{um} em vez de h_c. Utilizando as leis do Quadro 2 é possível fazer-se o traçado das funções i_c e prever a evolução do número de Froude. Utilizando a lei 3 pode verificar-se [3] [4] o seguinte:

Secção triangular : comportamento análogo ao caso 3, sem valor i_{cM}.

Secção circular : comportamento análogo ao caso 4, com valor i_{cM} para uma razão altura de escoamento/raio igual a 0.59.

Secção parabólica : comportomento análogo ao caso 4, com valor i_{cM} para uma determinada altura de escoamento.

Secção trapezoidal : comportamento dependente da inclinação dos taludes e da largura de rasto. Para um angulo com a normal inferior a 25° e uma razão entre a altura de escoamento e a largura de rasto inferior à unidade, o comportamento é análogo ao caso 4. Para um valor da referida razão superior à unidade, não há valor i_{cM} mas sim, um máximo. Para angulos superiores a 25° o comportamento é análogo ao caso 3.

2.3 — Limite superior do número de Froude em escoamento uniforme.

Quando existe um valor i_c mínimo (i_{cM}) e quando Q varia entre Q i e Q s (figura 4), o número de Froude varia entre a unidade e um valor limite F_L o qual, é função de i, de B, do expoente γ de i na lei de resistência e do valor i_{cM}. Efectivamente, o número de Froude admite as seguintes transformações, válidas para secções rectangulares ou não rectangulares :

$$F = \frac{U}{\sqrt{g\, h_{um}}} = \frac{U}{U'_c} = \left(\frac{i}{i'_c}\right)^{\gamma} \qquad (5)$$

Os valores das velocidades e declives críticos U'c e i'c dizem respeito a um caudal fictício, ao qual correspondo uma altura crítica média de valor idêntico ao da altura uniforme média correspondente ao caudal que se escoa no canal. O valor F_L corresponderá, para um determinado i, ao caudal cuja altura $h_{um} = h'_{cm}$ forneça o mínimo i_{cM} da função i_c. Nesta conformidade, a expressão do limite superior do número de Froude, em escoamento uniforme, é a seguinte:

$$F_L = \left(\frac{i}{i_{cM}}\right)^{\gamma} \qquad (6)$$

O valor F_L verifica-se quando se escoa um caudal Q para o qual a respectiva altura uniforme média cumpre a seguinte igualdade :

$$i'_c = i_{cM} = i_c\ (h_{um}) \qquad (7)$$

proveniente da função $i_c = i_c\ (h_{cm})$ correspondente à lei de resistência utilizada. No caso do escoamento ser laminar, $\gamma = 1.0$ e para um escoamento puramente turbulento, $\gamma = 0.5$.

Verifica-se, pela presente exposição, que a expressão do valor F_L não depende, de uma maneira explícita, nem da forma da secção, nem da rugosidade de perímetro molhado. Para todas as formas de secção que admitam a existência de valores estacionários nas funções i_c e F, é sempre possível, pelo menos teoricamente, a determinação formal das expressões correspondentes a i_{cM} e a F_L. O caso 4 pode considerar-se de fácil tratamento analítico vindo para a primeira expressão

$$i_{cM} = 2.67\ \frac{g}{K^2\ B^{1/3}} \qquad (8)$$

a qual introduzida na expressão (2) conjuntamente com a lei da resistência 3, permite obter a seguinte expressão do F

$$F = 1.633 \sqrt{\frac{i}{i_{cM}}} \left(\frac{h_u}{B}\right)^{1/6} \left(1 + \frac{2\,h_u}{B}\right)^{-2/3} \qquad (9)$$

cuja derivada, em ordem a $\frac{h_u}{B}$, se anula para um valor desta variável igual a $\frac{1}{6}$ o qual substituido em (9) conduz à expressão já deduzida para F_L. É de referir que este caso particular foi já apresentado em [4] não tendo, contudo, merecido da parte dos autores do artigo citado, a generalização que o assunto permite.

O cálculo analítico dos valores de i_{cM} e F_L, em cada caso particular, não parece ter grande interesse. Efectivamente, sendo a expressão (6) aplicável a qualquer forma da secção ou lei de resistência, a determinação de i_{cM} deverá ser efectuada por via gráfica, em virtude do grande interesse prático que as curvas, do tipo das apresentadas, possuem e do discutível rigor nas escolhas da lei a utilizar e do coeficiente de rugosidade a adoptar. A representação gráfica da função i_c permite uma rápida averiguação do regime de escoamento para um determinado Q, do sentido da variação da F quando se altera o caudal ou as características do canal e o cálculo iterativo de h_{um} ou h_{cm} (assunto tratado a seguir, na secção 3).

Em escoamento não uniforme a expressão (5) é válida desde que i seja substituido por J. Atendendo a que a perda de carga unitária deixa de ser constante, deixa, igualmente, de existir um limite superior para o número de Froude.

3 — DETERMINAÇÃO DA ALTURA UNIFORME

A função i_c pode ser utilizada na determinação da altura uniforme através das expressões que se podem deduzir para o número de Froude. Efectivamente, o parâmetro em causa, pode ter a seguinte expressão, para um determinado caudal Q,

$$F = \frac{Q}{B_u\, h_{um} \sqrt{g\, h_{um}}} = \sqrt{\frac{h_{cm}^3}{h_{um}^3}} \left(\frac{Bc}{Bu}\right) \qquad (10)$$

a qual, em conjunto com a (5), permite a determinação, por via iterativa, da altura h_{um}, se se conhecer a função i_c correspondente à forma da secção. Para secções rectangulares, as alturas médias coincidem com as alturas reais e Bc é igual a Bu, tornando-se o cálculo relativamente fácil (em 4 apresenta-se um exemplo numérico). Dum modo semelhante, pode-se determinar h_{cm} se se conhecer h_{um}.

4 — APLICAÇÕES E EXEMPLOS NUMÉRICOS

O conhecimento do limite superior do número de Froude pode ter muito interesse para o projectista, em virtude de muitos dimensionamentos, nos escoamentos em superfície livre, dependerem desse parâmetro. Citam-se, entre outros, os seguintes problemas: condições de entrada numa bacia de dissipação, estabilidade externa do escoamento e condicionalismos na variação de largura de um canal ao longo do seu percurso.

O dimensionamento de um canal no qual o número de Froude não possa ultrapassar um determinado valor, torna-se possível desde que a função i_c admita um mínimo absoluto, no intervalo de caudais de interesse. As figuras apresentadas, ou outras correspondentes a diversas formas de secção, permitem a escolha de B e de i mais convenientes. As mesmas figuras possibilitam o cálculo da altura uniforme para um determinado caudal.

Apresentam-se alguns exemplos numéricos em canais com secção rectangular com K = 70, lei de resistência 3 e escoamentos uniformes (caso 4).

Exemplo 1 — Pretende-se que o número de Froude nunca exceda o valor 2. Da expressão (6) virá $i < 4\ i_{cM}$ Para uma largura B = 6 m o declive do canal terá que ser $i < 0.011$ B (figura 2). Para uma largura B = 4 m virá para o declive $i < 0.0134$.

Exemplo 2 — Num canal com i = 0.0060, Q = 12 $m^3\ s^{-1}$ e B = 4 m, pretende-se determinar o valor de h_u. Ao caudal indicado corresponde uma altura crítica h_c = 0.97 m. Por via iterative, obtêm-se os valores $h_u = h'_c = 0{,}80$ m e i'c = 0.00337. Pela expressão (5) corresponde um número de Froude de F = 1.33. Utilizando o mesmo valor de h_u virá, pela expressão (10), F = 1.34. Para um cálculo expedito pode considerar-se como boa aproaproximação h_u = 0.80 m.

Exemplo 3 — Para o mesmo canal do exemplo 2 (com i = 0.0060 e B = 4 m) pretende-se determinar o valor F_L. Pela figura 2 ou expressão (8), obtém-se icM = 0.00336 e, pela expressão (6), obtém-se F_L = 1.336.

5 — CONCLUSÕES

As considerações expostas permitem concluir que, para determinadas formas e dimensões das secções, existe um valor limite superior do número de Froude cuja expressão geral é de fácil aplicação desde que se conheçam as funções do declive crítico com a altura. Este limite superior existe quando há um valor mínimo para o declive crítico. A representação gráfica das referidas funções permite uma fácil compreensão da evolução do número de Froude e podem ser um útil auxiliar no dimensionamento de canais de leito fixo, em escoamento uniforme.

6 — REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] — Quintela, A., 1975. Hidráulica II, Capítulo 3 - -Escoamentos com Superfície Livre. I.S.T, Lisboa.

[2] — Quintela, A., 1973. Perdas de Carga Unitária no Escoamento de Fluídos Incompressíveis. Fomento 11, p. 63 - 89 Lisboa.

[3] — Silber, R., 1968. Étude et Tracé des Écoulements Permanents en Canaux et Riviéres. Dunod. Paris.

[4] — Lakshmana Rao, N. S. e Kalambar S., 1970. Limit Slope in Uniform Flow Computations. Journal of the Hydraulics Division. Vol. 96 NO. H Y 1. JAN, p. 95 - 102. A. S. C. E.

7 — NOMENCLATURA

F — Número de Froude ;

F_L — Limite superior do número de Froude :

h_u — Altura uniforme ;

h_{um} — Altura uniforme média ;

h_c — Altura crítica ;

h_{cm} — Altura crítica média ;

h'_c — Altura crítica com valor igual ao da altura uniforme ;

h'_{cm} — Altura crítica média com valor igual ao da altura uniforme média ;

Q — Caudal ;

Qi — Caudal limite inferior do regime rápido ;

Qs — Caudal limite superior do regime rápido :

R — Raio hidráulico ;

i — Declive do canal ;

Ic — Declive crítico ;

i_{cQ} — Declive crítico correspondente ao caudal Q;

i_{cM} — Declive crítico mínimo ;

i'_c — Declive crítico correspondente a h'_c ou h'_{cm}

B — Largura da secção rectangular;

B_c — Largura superficial em escoamento crítico;

Bu — Largura superficial em escoamento uniforme ;

C_1 — Coeficiente de Chézy, independente de R ;

C — Coeficiente de Chézy ;

K — Coeficiente de Gauckler ;

e — Rugosidade absoluta ;

g — Aceleração da gravidade ;

U — Velocidade média ;

$U'c$ — Velocidade média correspondente a h'c ou h'cm ;

J — Perda de carga unitária ;

α — Coeficiente de Coriolis ;

y — $\beta\cos\theta$, com β Coeficiente de Jaeger Manzanares e θ angulo de fundo com a horizontal.

"Do Conhecimento e da acção"

COMENTÁRIO

Respondendo aos comentários que o Eng. Medina Martins fez o favor de fazer ao artigo «Do conhecimento e da acção» publicado no n.º 429 da Revista «Técnica» e porque esses comentários vão permitir um esclarecimento mais completo do pensamento que enformou o referido artigo, venho solicitar, com a autorização do referido Engenheiro, à Direcção da «Técnica» a publicação do seguinte:

1.º Comentário :

A descrição dos «seres» tal como apresentados no artigo, afiguram-se estáticos e não dinâmicos.

Resposta :

Um dos «seres instrumentos» a que é necessário recorrer na maioria dos problemas reais é o *cronómetro.*

Assim, um dos atributos do «universo dos seres» é o *Tempo.* — *(cronos).*

O Cronómetro e o respectivo atributo, o tempo, pode ser usado de duas formas típicas :

a) No espaço imagem do «ser em observação» *não está incluido o tempo.*

Neste caso o tempo é o atributo de um outro «ser», o crometro.

É então possível estabelecer uma *correspondência* entre as imagens do «ser em observação» e as do crometro que desempenha aqui a função de «ser» auxiliar.

Esta correspondência vai autorizar construir imagens derivadas ou integrais em relação ao tempo.

O Tempo toma a configuração de um atributo universal e independente dos objectos em observação.

Na mecânica clássica, todos os crometros são síncronos, o tempo é universal.

b) No espaço imagem do «ser em observação» *está incluido o atributo — tempo.*

O «ser em observação» *também* é ou *também inclui* um crometro que lhe é próprio e que dá origem ao *tempo desse ser.*

Pode até comparar-se o «tempo do ser» com o «tempo» dado pelo cronómetro do laboratório.

A teoria da relatividade prevê que os dois «tempos» não sejam síncronos e oferece um conjunto de justificações: acelerações, velocidades elevadas etc.

O que importa reter na hipótese b) é a distinção entre o «tempo do ser» e o «tempo do cronómetro do laboratório».

Resumindo a resposta ao 1.º comentário diremos que a discrição dos «seres» é estática ou dinamica conforme o atributo tempo é tomado em linha de conta, quer como atributo de um ente autónome — o cronometro — quer como uma propriedade do próprio «ser em observação».

2.º Comentário :

Como intervem o conceito de «invariancia» de um dado «ser» ?

Resposta :

O conceito de invariancia é sempre relativo.

O teste da invariancia envolve as seguintes operações :

Definição do sistema de funções ou funcionais da «imagem» do «ser» cujas *invariancias* se deseja verificar.

Definição de um outro sistema de funções ou funcionais da imagem do «ser» que se modifica arbitràriamente, embora possam essas modificações estar sujeitas a um conjunto de *restrições* (holónomas ou anholónomas.

Formadas estas duas classes há que testar se todos os membros da 1.ª classe se mantêm *invariantes*, quando um, vários ou todos os menbros da 2.ª classe tomam valores arbitrários apenas limitados pelas restrições holónomas ou anholónomas referidas.

Um exemplo é o da invariancia temporal, onde o tempo é um membro da 2.ª classe, que se faz variar arbitràriamente, nomeadamente invertê-lo.

Outro exemplo, é a dos *vectores-n*, como o volume, em espaços equivoluminares; com efeito, o tensor q^r é invariante na classe X^n dos espaços equivoluminares.

No entanto a invariancia de um atributo em relação a um outro não significa, òbviamente, que o seja em relação a todos os outros; daí que a invariancia tenha carácter relativo.

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
Seminars on Safety Clazing	National Building Research Institute - Pretória Janeiro e Fevereiro - 76
Concrete and Aggregates Industries Look Forward to Giant Houston Show in'76	Houston - Texas 1 a 5 de Fevereiro - 76
Internacional Spring Fair	Birmingham 1 a 5 de Fevereiro - 76
PRO — IN'76 Congresso Internacional e Exposição de Novidades	Dusseldorf 21 a 25 de Fevereiro - 76
IMONTA'76 — International Messe fur Schwertransport und Montage-Technik	Dusseldorf 25 a 29 de Fevereiro - 76
DIDACTA — European Educational Materials Fair	Basilea 23 a 27 de Março - 76
III Conference ON ELECTRODE PHENOMENA IN GAS DISCHARGES	Lisboa Maio - 76
V Simpósio Iberoamericano de Catálise	Lisboa 25 a 30 de Julho - 76 Fundação Gulbenkian

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 432

Ano LI — Janeiro 1976

C. D. U. 532.516:518

E. R. ARANTES E OLIVEIRA

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AOS ESCOAMENTOS VISCOSOS

Técnica N.º 432 — LI — 1-1976, p. 139 a 154

Resumem-se primeiramente os resultados de uma teoria dos métodos variacionais cuja utilização permite a análise da convergência do método dos elementos finitos aplicado ao escoamento de um fluído viscoso regido pelas equações de Navier-Stokes. O método empregado requer a decomposição do fluído em dois corpos mais simples: um fluído viscoso sem inércia e um fluído com inércia mas sem viscosidade. Apresenta-se para este último um novo princípio de mínimo.

C. D. U. 624.074

J. S. BRAZÃO FARINHA

CÁLCULO DE ESTRUTURAS RETICULADAS NO ESPAÇO

Técnica N.º 432 — LI — 1-1976, p. 155 a 166

Expõe-se sucintamente a aplicação do método de Cross na resolução de estruturas espaciais, constituídas por barras de momento de inércia constante ou variável, de eixo rectilíneo, ortogonais entre si, ou não.

Apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

C. D. U. 532.54

ANTÓNIO BETÂMIO DE ALMEIDA

LIMITE SUPERIOR DO NÚMERO DE FROUDE EM CANAIS PRISMÁTICOS E ESCOAMENTO UNIFORME

Técnica N.º 432 — LI — 1-1976, p. 167 a 172

O autor estuda a variação do número de Froude em canais prismáticos e escoamento uniforme e a possibilidade de o mesmo admitir um limite superior. Apresentam-se, igualmente, algumas aplicações numéricas.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 432

LI — January 1976

U. D. C. 532.54

ANTÓNIO BETÂMIO DE ALMENDA

FROUDE NUMBER UPPER BOUND IN PRISMATIC CHANNELS AND UNIFORM FLOW

Técnica N.° 432 — LI — 1-1976, p. 167 a 172

The author studies Froude number range in prismatic channels and uniform flow and the possibility of an upper bound for it. Numerical aplications are also shown.

U. D. C. 532.516:518

E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA

CONVERGENCE OF FINITE ELEMENT SOLUTIONS IN VISCOUS FLOW PROBLEMS

Técnica N.° 432 — LI — 1-1976, p. 139 a 154

Results of a theory variational problems are first summarized. The theory is then applied to the analisys of convergence of the finite element method applied to the flow of a viscous fluid governed by Navier-Stokes equations. The approach requires the decomposition of the body into two simpler ones: a viscous non-inertial fluid and an inertial non-viscous one, the mechanical behaviour of which is governed by minimum principles. A new minimum principle is presented for the inertial non-viscous fluid.

U. D. C. 624.074

J. S. BRAZÃO FARINHA

ANALYSIS OF SPACE FRAMES

Técnica N.° 432 — LI — 1-1976, p. 155 a 166

It is succintly stated the application of the Cross method on the resolution of rigid space structures, constituted by bars of constant or variable inertia, of rectilinear axis, orthogonal between them, or not.
Some application examples are presented.

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECÂNICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TÉCHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CÂMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges e Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração-Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRÁFICO DO EXÉRCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique
Instituto dos Produtos Florestais

— CENIM

— CORTIÇA
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Provincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industarial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L' E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIÁRIO DOS ELASTÔMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de L'information de L'organisation des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais da Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ)

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National D'Études et de Recherchse Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins de fer et de L'Union Internationale des Chemins de fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE) BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

VICENTE FERREIRA E BRAZÃO FARINHA

TABELAS TÉCNICAS

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES
DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - LISBOA

7ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA
PREÇO 250.00
DESC. 10% AOS ASSINANTES

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA